Stochastische Prozesse I

5 Verhalten von Erneuerungsprozessen für $t \to \infty$

5.1 Verhalten von N_t für $t \to \infty$

Satz Et 5.1: (a) $S_n/n \to EY_2 := \mu$ P-f.s. für $n \to \infty$, (b) $N_t/t \to 1/\mu$ P-f.s. für $t \to \infty$.

Beweis: (a) folgt aus dem starken Gesetz der großen Zahlen für $\mu = EY_2 < \infty$:
$\frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^n Y_i \to EY_2 = \mu$ P-f.s. $\Rightarrow$ $\frac{S_n}{n} = \frac{1}{n}Y_1 + \frac{n-1}{n}\frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^n Y_i \to EY_2$ P-f.s. für $n \to \infty$.
Falls $EY_2 = \infty$, betrachtet man $Y_i^{(c)} := \min(c, Y_i)$, $S_n^{(c)} := \sum_{i=1}^n Y_i^{(c)} \le S_n$ $(0 < c < \infty)$
$\Rightarrow$ $\underline{\lim}\, \frac{1}{n} S_n \ge \underline{\lim}\, \frac{1}{n} S_n^{(c)} \overset{P\text{-f.s.}}{=} EY_2^{(c)} \uparrow \infty$ (monotone Konvergenz), also $\frac{1}{n}S_n \overset{P\text{-f.s.}}{=} \infty = EY_2$.
(b) Aus $S_{N_t} \le t < S_{N_t+1}$ folgt $\frac{N_t}{N_t+1}\frac{N_t+1}{S_{N_t}+1} = \frac{N_t}{S_{N_t}+1} < \frac{N_t}{t} \le \frac{N_t}{S_{N_t}}$.
Mit $t \to \infty$ und $N_t \to \infty$ (Et 1.1) folgt: $\frac{N_t}{N_t+1} \overset{P\text{-f.s.}}{\to} 1$ und mit (a) $\lim \frac{N_t}{t} = \frac{1}{\mu}$ P-f.s..

5.2 Verhalten von $U(t)/t$ für $t \to \infty$

Satz Et 5.2: Sei $\mu_1 := EY_1$, $\mu := EY_2$ (nicht notw. endlich). Dann gilt: $\dfrac{U(t)}{t} \to \dfrac{1}{\mu}$ für $t \to \infty$.

Beweis: Vorbemerkung: Aus $\frac{1}{t}N_t \overset{P\text{-f.s.}}{\to} \frac{1}{\mu}$ folgt $E(\frac{1}{t}N_t) \to \frac{1}{\mu}$ nicht ohne weitere Voraussetzung.
(a) (zunächst nur für $EY_1, EY_2 < \infty$): Ist EV_t beschränkt, folgt $\frac{1}{t}U(t) \to \frac{1}{\mu}$ direkt aus Et 3.2:
$EV_t = EY_1 + EY_2 U(t) - t$ $(*)$. Falls EV_t nicht beschränkt, folgt $\underline{\lim}\, \frac{1}{t}U(t) \ge \frac{1}{\mu}$ wegen $EV_t > 0$.
Mit „Stutzung" wie im Beweis von Et 5.1 zeigt man $\overline{\lim}\, \frac{1}{t}U(t) \le \frac{1}{\mu}$.
Im Fall $\mu = \infty$ ist bei $\underline{\lim}$ nichts zu zeigen, bei $\overline{\lim}$ bleibt der Beweis richtig. Bei $\mu_1 = \infty$ und $\underline{\lim}$ geht der Beweis nur bei $F = G$, also bei U_F. Der Rest geht mit $U = G + G * U_F$ (L.v.F.).

5.3 Untere und obere Schranken für $U(t)$

Satz Et 5.3: Sei $\mu_1 := EY_1 < \infty$, $\mu := EY_2 < \infty$, $\sigma^2 := \mathrm{Var} Y_2$.

Dann gilt: (a) $U(t) > \dfrac{t}{\mu} - \dfrac{\mu_1}{\mu}$ für $0 \le t < \infty$,

(b) $U(t) \le \dfrac{t}{\mu} + \dfrac{\sigma^2 + \mu^2}{\mu^2}$ für $0 \le t < \infty$.

Beweis: (a) folgt direkt aus Et 3.2: $EV_t = EY_1 + EY_2 \cdot U(t) - t$ mit $EV_t > 0$.
(b) folgt (trickreich) mit den Eigenschaften von $U_0(t)$, der Erneuerungsfunktion zu $Y_1 \equiv 0$.
(b1) $U(t) = E(U_0(t - Y_1))$, $t \ge 0$. $[\, E(N_t | Y_1 = s) = 1_{\{s \le t\}} + U_F(t-s) = U_0(t-s)\,]$
(b2) $U_0(s+t) \le U_0(s) + U_0(t)$. $[\, U_0(s+t) = U_0(s) + E(U_0(t - V_s)) \le$ r.S., vgl. (b1)$\,]$
(b3) $\overline{Y}_1 \sim G_F \;\Leftrightarrow\; U(t) = \frac{t}{\mu}$. $[$ s. Et 4.1 mit $G_F(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t [1 - F(s)]\, ds\,]$
(b4) $\overline{Y}_1 \sim G_F \;\Leftrightarrow\; E\overline{Y}_1 = \frac{1}{2\mu}(\sigma^2 + \mu^2)$. $[$ folgt aus $G_F = \ldots$ mit d. Satz v. Fubini$\,]$
(b5) Sind nun $\overline{Y}_1, \widehat{Y}_1$ zwei stochastisch unabhängige ZV mit Vf G_F, dann gilt:

$$\begin{aligned}
U_0(t) &= E\left[U_0(t + \overline{Y}_1 - \widehat{Y}_1 + \widehat{Y}_1 - \overline{Y}_1)\right] \overset{(b2)}{\le} E(U_0(t + \overline{Y}_1 - \widehat{Y}_1)) + E(U_0(\widehat{Y}_1 - \overline{Y}_1)) = \\
&= E[E[U_0(t + \overline{Y}_1 - \widehat{Y}_1) \mid \overline{Y}_1]] + E[E[U_0(\widehat{Y}_1 - \overline{Y}_1) \mid \widehat{Y}_1]] = \\
&\overset{(b1)}{=} E[U(t + \overline{Y}_1)] + E[U(\widehat{Y}_1)] \overset{(b3)}{=} E[\tfrac{1}{\mu}(t + \overline{Y}_1)] + E[\tfrac{1}{\mu}\widehat{Y}_1] = \\
&= \tfrac{t}{\mu} + \tfrac{1}{\mu}E\overline{Y}_1 + \tfrac{1}{\mu}E\widehat{Y}_1 \overset{(b4)}{=} \tfrac{t}{\mu} + \tfrac{\sigma^2+\mu^2}{\mu^2}, \text{ also } U_0(t) \le \tfrac{t}{\mu} + \tfrac{\sigma^2+\mu^2}{\mu^2}.
\end{aligned}$$

(b6) Mit (b1) folgt $U(t) = E(U_0(t - Y_1)) \le E[\frac{t - Y_1}{\mu}]^+ + \frac{\sigma^2+\mu^2}{\mu^2} \le \frac{t}{\mu} + \frac{\sigma^2+\mu^2}{\mu^2}$ = Beh.