Stochastische Prozesse I

4 Stationäre Erneuerungsprozesse und regenerative Prozesse

Ziel: „(S_n), (N_t), (V_t) langfristig stationär“ ? 1. Schritt: „Stationarität von Anfang an“ ?
2. Schritt: „Stationarität“ für einzelne Zeitpunkte ? (s.u.)

Definition: Ein Erneuerungsprozess heißt **stationär**, falls $P^{V_t} = P^{Y_1}\ \forall t \geq 0$ (vgl. HMK !).

Et 4.1 Folgerung: (a) (S_n) ist stationär $\Rightarrow$ $EV_t = EY_1$ für alle $t \geq 0$.
(b) (S_n) stationär, $\underline{\mu_1 := EY_1} < \infty \Rightarrow EY_2 \cdot U(t) = t\ \forall t \Rightarrow \underline{\mu := EY_2} < \infty$ und $U(t) = \frac{t}{\mu}\ \forall t$.
(c) $U(t) = \frac{t}{\mu}\ \forall t$ mit $\mu = EY_2 < \infty \Leftrightarrow \boxed{Y_1 \text{ hat Vf } G_F(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t [1-F(s)]\, ds\,,\ t \geq 0}$, auch $V_t\ \forall t$.

Beweis: (a) s. Def., (b1) aus Et 3.2 ($EV_t = EY_1 + EY_2 \cdot U(t) - t$), (b2): $\mu = \infty$ geht nicht,
(c1) aus $U = G + U * F$ (Et 1.3) : $G_F(t) = \frac{t}{\mu} - \frac{1}{\mu}\int_0^t F(t-u)\, du = \frac{t}{\mu} - \frac{1}{\mu}\int_0^t F(s)\, ds$ $(s = t-u)$,
(c2) wg. $\Psi_U = \Psi_G/(1-\Psi_F)$ bestimmen sich U und G_F gegenseitig (bei festem F).

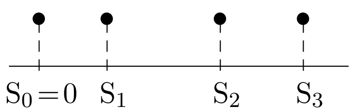
Bemerkung: Für Y_1^{st} mit Vf G_F gilt: $EY_1^{\text{st}} = \frac{1}{2\mu}(\sigma^2 + \mu^2)$ mit $\sigma^2 := \operatorname{Var} Y_2$.

2. Schritt: Regenerative Prozesse

Definition: Ein stochastischer Prozess $(X_t, t \geq 0)$ heißt **regenerativer Prozess**,
falls es eine Stoppzeit S_1 gibt (einen Regenerationszeitpunkt), für den gilt:
(a) Der in S_1 gestoppte Prozess $(X_{t \wedge S_1})$ und der Post-S_1-Prozess $(X_{S_1 + t})$ sind stoch. unabhängig.
(b) Der Post-S_1-Prozess hat dieselbe Verteilung wie der ursprüngliche Prozess (X_t).

Folgerung: Es gibt dann weitere Regenerationszeitpunkte $S_2, S_3, \ldots$ und (S_n) ist „normal“.

Bemerkung: Der einfachste regenerative Prozess (X_t) ist
$(X_t = \sum_{n=0}^{\infty} 1_{\{S_n = t\}})$, falls (S_n) ein *normaler* Ern.-Prozess ist.



Typisches Beispiel: HMK mit $X_0 = j$ und $S_1, S_2, \ldots = \tau_j^1, \tau_j^2, \ldots$ (starke ME).

Eine Familie von Ereignissen $(A_t, t \geq 0)$ heißt **regenerativ bzgl.** $\boldsymbol{(X_t, t \geq 0)}$ (s.o.), wenn
$P(A_t | S_1 = s \leq t) = P(A_{t-s})$ gilt. (Der Prozessanfang kann also vergessen werden.) Dann gilt
für $(A_t, t \geq 0)$ mit $Z(t) := P(A_t)$, $z(t) := P(A_t \cap \{S_1 > t\})$ die **„Erneuerungsgleichung“:**
$\underline{(*)\quad Z(t) = z(t) + (F * Z)(t)}$ $(F := F^{S_1})$. Die Herleitung heißt **Erneuerungs-Argument**.

Beispiel: $G = F$: $U = \underline{U_F := \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}}$. Sei $A_t := \{V_t > v\}$, $v > 0$. Dann zerlegt man:
$P(V_t > v) = P(V_t > v, Y_1 > t) + P(V_t > v, Y_1 \leq t) = P(Y_1 > t + v) + \int_0^t P(V_{t-s} > v)\, P^{Y_1}(ds)$.
Mit $Z(t) := P(V_t > v)$ und $z(t) := 1 - F(t + v)$ gilt dann $Z(t) = z(t) + (F * Z)(t)$ $(*)$.

Bem.: Nach 3.4 hat $(*)$ die Lösung $P(V_t > v) = 1 - F(t + v) + (1 - F(\cdot + v)) * U_F(t)$, also
$Z(t) = z(t) + z * U_F(t)$ oder $Z(t) = z * U_0(t)$ mit $\underline{U_0(t) := \sum_0^{\infty} F^{n*}(t)} = 1_{I\!R_+}(t) + U_F(t)$.

Et 4.2 Satz: Für $z \in \mathcal{M} := \{h : I\!R \to I\!R : h \text{ messbar, beschränkt auf } [0, t]\ \forall t,\ h = 0 \text{ auf } (-\infty, 0)\}$
hat $(*)$ in $\mathcal{M}$ die eindeutige **Lösung** $\underline{Z(t) = z(t) + (z * U_F)(t) = (z * U_0)(t)}$ mit $Z \in \mathcal{M}$.

Beweis: (a) Zu zeigen: $U_0 * z \in \mathcal{M}$: Sei $T > 0 \Rightarrow \sup_{0 \leq t \leq T}(U_0 * z)(t) =$
$= \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^t z(t - v) U_0(du) \leq \sup_{0 \leq t \leq T} z(t) \cdot U_0(T) < \infty$.
(b) $U_0 * z$ ist Lösung: $F * (U_0 * z) = (F * U_0) * z = (U_0 - F^{0*}) * z = U_0 * z - z$.
(c) Seien Z_1, Z_2 Lösungen, $Z_i \in \mathcal{M} \Rightarrow H := Z_1 - Z_2 = (z - z) + F * (Z_1 - Z_2) = F * H$,
iteriert: $H = F^{n*} * H \Rightarrow \sup_{0 \leq t \leq T} |H(t)| = \sup_t |\int_0^t H(t - y)\, F^{n*}(dy)| \leq \sup_t |H(t)|\, F^{n*}(T)$.
Wegen $U_F(T) = \sum_1^{\infty} F^{n*}(T) < \infty$ folgt $F^{n*} \to 0$ $(n \to \infty)$ und damit $\sup_t |H(t)| \to 0$.