Gerhard Hübner, Universität Hamburg,
Fachbereich Mathematik, Schwerpunkt ST

Stochastische Prozesse I

3 Restlebensdauer und bisherige Einsatzdauer

Wir betrachten einen Erneuerungsprozess (S_n) zur Zeit $t+$ *:
Wie lange arbeitet das im Betrieb befindliche Bauteil schon/noch?
* zur Zeit t könnte eine Erneuerung (oder mehrere) stattfinden.

Definition: Sei (S_n) ein Erneuerungsprozess, (N_t) der zug. Zählprozess.
(a) $V_t(\omega) := S_{N_t(\omega)+1}(\omega) - t$ heißt **Restlebensdauer** (forward recurrence time) zur Zeit $t+$.
(b) $W_t(\omega) := t - S_{N_t(\omega)}(\omega)$ heißt **bisherige Einsatzdauer** (backward rec. time) zur Zeit $t+$.
(c) $L_t := W_t + V_t = Y_{N_t+1}$ heißt **(inspizierte) Lebensdauer** (total life time) zur Zeit $t+$.

Folgerung Et 3.1: V_t, W_t, L_t sind Zufallsvariable, und es gilt $V_t > 0,\ 0 \le W_t \le t$.

Beweis: $V_t = \sum_{n=0}^{\infty} 1_{\{N_t=n\}}\,(S_{n+1} - t)$, auf $\{N_t = n\}$ ist $S_{n+1} > t$,
$W_t = \sum_{n=0}^{\infty} 1_{\{N_t=n\}}\,(t - S_n)$, auf $\{N_t = n\}$ ist $0 \le S_n \le t$.

Satz Et 3.2: $\boxed{EV_t = EY_1 + EY_2 \cdot U(t) - t}$ $(= EY_1 + EY_2 \cdot EN_t - t)$.

Beweis: $ES_{N_t+1} = E\sum_{n=0}^{\infty} Y_{n+1} \cdot 1_{\{N_t \ge n\}} = \sum_{n=0}^{\infty} E(Y_{n+1} \cdot 1_{\{S_n \le t\}}) =$
$(Y_{n+1}, S_n \text{ st. unabh.}) = \sum_{n=0}^{\infty} EY_{n+1} \cdot P(S_n \le t)) = EY_1 + EY_2 \cdot U(t)$.

Bemerkung: Aus Et 3.2 werden wir in Et 5 schließen: $U(t) \sim t/EY_2$.

Vor der Verteilung von V_t betrachten wir den Zusammenhang von V_t und W_t:

Satz Et 3.3: Für $0 \le w \le t,\ v \ge 0$ gilt $P(V_t > v,\ W_t \ge w) = P(V_{t-w} > v+w)$ (sonst $= 0$),
speziell für $v=0$: $P(W_t \ge w) = P(V_{t-w} > w)$.

Beweis: Sei $0 \le w \le t,\ v \ge 0 \Rightarrow \{V_t > v,\ W_t \ge w\} \Leftrightarrow \{$ **kein** S_i in $(t-w, t]$ **und** in $(t, t+v]\,\}$
$\Leftrightarrow \{$ **kein** S_i in $(t-w, t+v]\,\} \Leftrightarrow \{V_{t-w} > v + w\}$.

Bemerkung: Für P^{W_t} und $P^{(V_t,W_t)}$ und P^{L_t} genügt es also, P^{V_t} zu kennen.

Satz Et 3.4 (Verteilung von V_t): $P(V_t \le v) = G(t+v) - \int_{[0,t]}[1-F(t+v-s)]\nu(ds)$.

Beweis: $P(V_t > v) = P(\{\text{in } [0, t+v] \text{ kein } S_i\} + \{\exists S_n \in [0,t], Y_{n+1} > t+v-S_n\}) = \mathbf{I} + \mathbf{II}$,
$\mathbf{II} = \sum_{n=1}^{\infty} P(S_n \le t,\ Y_{n+1} > t+v-S_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[0,t]} P^{S_n}(ds)\, P(Y_{n+1} > t+v-s | S_n = s)$
$\overset{st.u.}{=} \int_{[0,t]} \sum_{n=1}^{\infty} P^{S_n}(ds)\, P(Y_{n+1} > t+v-s) = \int_{[0,t]} \nu(ds)\,[1-F(t+v-s)]$, $\quad \mathbf{I} = [1-G(t+v)]$.

Folgerung Et 3.5: Bei λ-Dichten f^{Y_1}, f^{Y_2} gilt: $f^{V_t}(v) = f^{Y_1}(v+t) + \int_{[0,t]} f^{Y_2}(t+v-s)\nu(ds)$.

Beispiel 1 (Poisson-Ern.proz.): $P^{Y_1} = P^{Y_2} = \text{Exp}(\alpha)$, $P^{S_n} = \Gamma_{\alpha n}$, $P^{N_t} = \pi_{\alpha t}$, $U(t) = \alpha t$, $\nu = \alpha\lambda_+$,

zu Et 3.2: $EV_t = EY_1 + EY_2\, U(t) - t = 1/\alpha + (1/\alpha)\,\alpha t - t = 1/\alpha = EY_1$ **unabh. v.** t (!).

zu Et 3.4: $P(V_t \le v) = 1 - e^{-\alpha(t+v)} - \int_{[0,t]} e^{-\alpha(t+v-s)}\alpha\, ds = 1 - e^{-\alpha v} = P(Y_1) \le v)$ (!),

zu Et 3.3: $P(W_t \ge w) = P(V_{t-w} > w) = e^{-\alpha w}$, $0 \le w \le t$, sonst $= 0$, $\Rightarrow$

$P(W_t \le w) = 1 - e^{-\alpha w}\, 1_{[0,t)}(w)$, $EW_t = \int_0^t e^{-\alpha w} dw = \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})$.

$P(V_t > v, W_t \ge w) = e^{-\alpha(v+w)} 1_{[0,t]}(w) = e^{-\alpha v}\, e^{-\alpha w} 1_{[0,t]}(w) =$

$= P(V_t > v), P(W_t \ge w) \Rightarrow V_t$ und W_t sind **stoch. unabhängig!**

$P^{L_t} = P^{W_t} * P^{V_t} \approx \Gamma_{2,\alpha}$ für große t, $EL_t = EW_t + EV_t = (1/\alpha)(2 - e^{-\alpha t}) \approx 2/\alpha = 2EY_i$.

Vergleiche P^{L_t} und P^{Y_i}, EL_t und EY_i! – **Inspektions-Paradox!** (Erklärung?)

Beispiel 2: $P^{Y_1} = P^{Y_2} = B(p)$: $L_t = 1,\ W_t = t - \lfloor t \rfloor \Rightarrow V_t = 1 - (t - \lfloor t \rfloor)$. (Interpretation ?)