Gerhard Hübner, Universität Hamburg,
Fachbereich Mathematik, Schwerpunkt ST

Stochastische Prozesse II

2 Erneuerungsprozesse: Beispiele und Laplace-Transformation

Beispiel B1: Sei $P^{Y_1} = P^{Y_2} = \text{Exp}(\alpha) \Rightarrow G(x) = F(x) = 1 - e^{-\alpha x}$, $P^{S_n} = \Gamma_{n,\alpha} = (\text{Exp}(\alpha))^{n*}$. $\Gamma_{n,\alpha}$, die Gamma-Verteilung, hat die Dichte $\gamma_{n,\alpha}(x) = \frac{\alpha^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\alpha x} 1_{(0,\infty)}(x)$ $[\,\Gamma(n) = (n-1)!\,]$ und die Verteilungsfunktion $\int_0^t \gamma_{n,\alpha}(x)dx = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\alpha t} \frac{(\alpha t)^k}{k!} = \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\alpha t} \frac{(\alpha t)^k}{k!}$ $(= P(N_t \geq n))$. Also gilt: $P(N_t = n) = e^{-\alpha t} \frac{(\alpha t)^k}{k!}$, $P^{N_t} = \text{Poisson}(\alpha t)$, $U(t) = EN_t = \alpha t$, $\nu = \alpha \cdot \lambda|_{\mathbb{R}_+} =: \alpha\lambda_+$.

Interpretation: Die S_n sind auf R_+ (im Mittel) gleichmäßig verteilt: $\nu([a,b]) = \alpha \cdot \lambda([a,b])$.

Bemerkung: 1. Bei $P^{Y_i} = \text{Exp}(\alpha)$ altern die Ersatzteile nicht: $\frac{P(Y_1 > s+t)}{P(Y_1 > s)} = P(Y_1 > t)$.
2. Wg. $P^{N_t} = \pi(\alpha t)$ heißt (N_t) **Poisson-Zählprozess**, (S_n) **Poisson-Erneuerungsprozess**.

Beispiel B2: $P^{Y_1} = P^{Y_2} = B(p)$. $P^{S_n} = ?$, $P^{N_t} = ?$, z.z. $U(t) = \frac{1-p}{p} + \lfloor t \rfloor \cdot \frac{1}{p}$. Skizze für $p = 2/3$?

Definition: Sei μ ein Maß auf $\mathbb{R}$ und $\exists\, a \geq 0$ mit $\boxed{\psi_\mu(t) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tx} \mu(dx)}$ **endlich** $\forall\, t > a$, dann heißt $(\psi_\mu(t),\ t > a)$ die **Laplace-Transformierte (LT)** von μ. [„die LT von μ ex.“] Ist $\mu = P^X$, so heißt $\psi_X := \psi_\mu$ auch die LT von X – und es gilt $\psi_X(t) = Ee^{-tX}$, $t \geq 0$.

Beispiele: $\psi_{\text{Exp}(\alpha)}(t) = \alpha/(\alpha + t)$, $\psi_{B(p)}(t) = 1 - p + p\, e^{-t}$, $\psi_{\lambda_+}(t) = 1/t$ $(t > 0)$.

Et 2.1 Folgerung: (a) **Linearität:** $\psi_{aX+b}(t) = e^{-bt} \psi_X(at)$, $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$. [einsetzen!]
(b) **Faltung:** $\psi_{\mu * \nu} = \psi_\mu \cdot \psi_\nu$ und $\psi_{X+Y} = \psi_X \cdot \psi_Y$, falls X, Y st.u. $[\,Ee^{-t(X+Y)} = Ee^{-tX} Ee^{-tY}\,]$
(c) **EX^n:** $EX = -\psi'_X(0+)$, $EX^2 = \psi''_X(0+)$, $EX^n = (-1)^n \psi_X^{(n)}(0+) \leq \infty\ \forall n$. [falls EX^n ex.]
(d) **Eindeutigkeit:** Die Zuordnung $\mu \to \psi_\mu$ ist umkehrbar eindeutig. [s. z.B. Feller II]
(e) **Stetigkeit:** $\psi_{\mu_n} \to \psi_\mu \Leftrightarrow \mu_n \to \mu$ $(:\Leftrightarrow F_{\mu_n}(x) \to F_\mu(x)\ \forall x$ mit ‚F_μ stetig in x‘). [s. $\uparrow$]

Andere Transformierte: (ebenso: „Faltung“, „EX^n =“, linear, eindeutig, stetig)
Fourier-Transformierte (= char. Fkt.) $\phi_X(t) := Ee^{itX} = \psi_X(-it)$, [ex. $\forall t \in \mathbb{R}$]
Momentenerzeugende Funktion $M_X(t) := Ee^{tX} = \psi_X(-t)$, [bei Abl. ohne „$-$“]
Erzeugende Funktion $g_X(s) := Es^X = \psi_X(-\ln s)$ für $X : \Omega \to \mathbb{N}_0$. [Umkehr einf.]

Et 2.2 Folgerung: ψ_G, ψ_F seien die LT von P_G bzw. P_F, dann gilt:

$$\nu \text{ hat die LT } \quad t \to \psi_\nu(t) = \frac{\psi_G(t)}{1 - \psi_F(t)},\ t \geq 0.$$

Beweis: Sei $t > 0$, dann ist $\psi_F(t) = \int e^{-tx} P^{Y_2}(dx) \leq 1$, sogar < 1, da sonst $P(Y_2 = 0) = 1$.
$\Rightarrow \psi_\nu(t) = \int e^{-tx} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} P^{S_n}\Big)(dx) = \sum_{n=1}^{\infty} \int = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{S_n}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_G(t)(\psi_F(t))^{n-1} = \text{r.S.}$

Beispiele: **B1:** $G = F$, $\psi_{Y_i}(t) = \psi_F(t) = \alpha/(\alpha + t)$ (s.o.), $\psi_\nu(t) = \alpha/t$, $\psi_{\alpha\lambda_+}(t) = \alpha/t$ (s.o.).
B2: $\psi_F(t) = 1 - p\,(1 - e^{-t})$ (s.o.), $\psi_\nu = \frac{1 - p(1 - e^{-t})}{p(1 - e^{-t})} = \frac{1}{p} \frac{1}{1 - e^{-t}} - 1 = \frac{1}{p} - 1 + \frac{1}{p} e^{-t} + \frac{1}{p} e^{-2t} + \frac{1}{p} e^{-3t} + \cdots$.

Et 2.3 Folgerung: Bei einem *normalen* Erneuerungsprozess bestimmen sich folgende Größen gegenseitig (eindeutig): $P^{Y_i} \overset{(1)}{\leftrightarrow} F \overset{(2)}{\leftrightarrow} \psi_F \overset{(3)}{\leftrightarrow} (P^{S_n}) \overset{(4)}{\leftrightarrow} (P^{N_t}) \overset{(5)}{\leftrightarrow} (EN_t) = U \overset{(6)}{\leftrightarrow} \nu \overset{(7)}{\leftrightarrow} \psi_\nu$, insbesondere ist durch (EN_t) bereits P^{N_t} bestimmt, sogar$^{(8)}$ $P^{(N_{t_1}, \ldots, N_{t_k})}$.

Beweis: (1) u. (6) ist klar, (2) u. (7) s. Et 2.1 (d), (3) folgt mit $\psi_F \leftrightarrow (\psi_F)^n = \psi_{S_n} \leftrightarrow P^{S_n}$, (4) folgt aus $\{N_t \geq n\} \overset{*}{=} \{S_n \leq t\}$ (Et 1.1 (a)), $\overset{(5)}{\to}$ ist klar, $\overset{(5)}{\leftarrow}$ folgt aus [(6),(7), $\psi_\nu \leftrightarrow \psi_F$ (Et 2.2 mit $G = F$) und (3),(4)]. Mit * folgt auch $(P^{S_n}) \overset{st.u.}{\to} P^{(S_{n_1}, \ldots, S_{n_k})} \to P^{(N_{t_1}, \ldots, N_{t_k})}$.