Gerhard Hübner, Universität Hamburg,
Fachbereich Mathematik, Schwerpunkt ST

Stochastische Prozesse I

Faktorisierung bedingter Erwartungwerte und bedingte Wahrscheinlichkeit

Zunächst wird an Satz 4.9 aus HMK-D 4.3 erinnert:

Satz E 8:
Für $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\overline{I\!R}, \overline{I\!B})$ und $Y : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathcal{Y}, \mathcal{C})$ (messb.) gilt: Ist X $\sigma(Y)$-$\overline{I\!B}$-messbar, dann gibt es eine $\mathcal{C}$-$\overline{I\!B}$-messbare Abbildung $g : \mathcal{Y} \to \overline{I\!R}$ mit $X = g\,(Y)$ und umgekehrt.

$$\begin{tikzcd}
(\Omega, \mathcal{A}) \arrow[r, "Y"] \arrow[dr, "X"'] & (\mathcal{Y}, \mathcal{C}) \arrow[d, "g"] \\
& (\overline{I\!R}, \overline{I\!B})
\end{tikzcd}$$

Folgerung E 9: „Faktorisierung“ von $E(X|\,Y)$
Sei $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\overline{I\!R}, \overline{I\!B})$, P-quasi-integrierbar, $Y : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathcal{Y}, \mathcal{C})$. Dann ex. zu $E(X|\,Y)$ eine Abbildung $g = E(X|\,Y{=}\,\cdot) : (\mathcal{Y}, \mathcal{C}) \to (\overline{I\!R}, \overline{I\!B})$ mit $\boxed{E(X|\,Y) = g\,(Y) = E(X|\,Y{=}\,\cdot) \circ Y}$.

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Vorbemerkung: Dem Operator $E : X \to EX$ wird zugeordnet $P : B \to P(B) := E(1_B)$.
Kann auch $E(\cdot|\,Y) : X \to E(X|\,Y)$ zugeordnet werden $B \to P(B|\,Y) := E(1_B|\,Y)$?

Folgerung E 10:
Sei $Y : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathcal{Y}, \mathcal{C})$ (messb.), $B \in \mathcal{A}$ und $\boxed{P(B|\,Y) := E(1_B|\,Y)}$. [$B$ fest!]
Dann existiert $P(B|\,Y{=}\,\cdot) := E(1_B|\,Y{=}\,\cdot)$ und es gilt $\boxed{P(B|\,Y) = P(B|\,Y{=}\,\cdot) \circ Y}$.

Frage: Ist $(y, B) \mapsto P(B|\,Y{=}\,y)$ ein Übergangs-W-Maß? [$\forall B$ $\mathcal{C}$-$I\!B$-messb., $\forall y$ W-Maß]

Für festes $B \in \mathcal{A}$ ist $P(B|\,Y{=}\,\cdot)^*$ $\mathcal{C}$-$I\!B$-messbar. [* genauer: jeder Repräsentant]
Für $y \in N_B^c$ ist $P(B|\,Y{=}\,y) \geq 0$, $P(\Omega|\,Y{=}\,y) = 1$,
Für $y \in \bigcup_i N_{B_i}^c$ ist $P(\sum_1^\infty B_i|\,Y{=}\,y) = \sum_1^\infty P(B_i|\,Y{=}\,y)$
(wg. Linearität für $\sum_1^n B_i$, s. E 4 (2), und mon. Konvergenz, vgl. E 4 (7)).

Folgt daraus, dass $P(\cdot\,|\,Y{=}\,y)$ für P-fast alle y ein W-Maß ist?
Man braucht dazu, dass $\mathcal{A}$ einen abzählbaren Erzeuger besitzt, wie z.B. $\mathcal{A} = I\!B^k$.

Folgerung E 11:
Ist $Y : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathcal{Y}, \mathcal{C})$ (messb.), $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathcal{X}, \mathcal{B})$ (messb.), $\mathcal{B}$ mit abz. Erzeuger.
Dann existiert ein Übergangs-W-Maß $P^{(X|\,Y=\cdot)}$ mit $\boxed{P^{(Y,X)} = P^Y \otimes P^{(X|\,Y=\cdot)}}$.

Beweis: $P^{(X|\,Y=\cdot)}(y, B) = P(X^{-1}(B)|\,Y{=}\,y)$ $(B \in \mathcal{B})$. Statt $B \in \mathcal{A}$ (wie in E 10) betrachtet man hier $X^{-1}(B) \in X^{-1}(\mathcal{B}) =: \mathcal{A}'$ und $\mathcal{A}'$ hat einen abzählbaren Erzeuger.
Man kann also jetzt E 10 anwenden.