Gerhard Hübner, Universität Hamburg,
Fachbereich Mathematik, Schwerpunkt ST

Stochastische Prozesse I

Bedingte Erwartungswerte und Orthogonal-Projektion in $\mathcal{L}_2(\mathcal{A})$

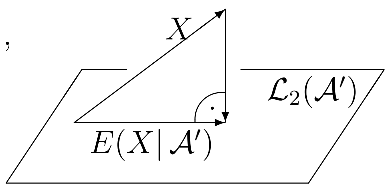
Definition E 6:
Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum, $\mathcal{A}'$ eine Unter-σ-Algebra von $\mathcal{A}$
und es sei $L_2(\mathcal{A}) := \{X : \Omega \to \overline{I\!R} \,|\, X$ ist quadratisch integrierbar u. $\mathcal{A}$-messbar$\}$,
Dann heißt $\underline{\mathcal{L}_2(\mathcal{A})} := L_2(\mathcal{A})$ modulo „P-f.s.=“ – als Menge von Repräsentanten –
der $\underline{\mathcal{L}_2\text{-Raum}}$ über $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, auch geschrieben als $\mathcal{L}_2(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Entsprechend sei $\mathcal{L}_2(\mathcal{A}')$ definiert mit Messbarkeit bzgl. $\mathcal{A}'$.
Außerdem definiert man für $X, Y \in \mathcal{L}_2(\mathcal{A})$:

$$
\begin{array}{rcll}
<X,Y> & := & E(XY), & \text{ein Skalarprodukt (s. Folg. (b)),} \\
\|X\| & := & <X,X>^{1/2}, & \text{die zugehörige Norm auf } \mathcal{L}_2(\mathcal{A}), \\
X \perp Y & :\Leftrightarrow & <X,Y> = 0, & \text{die zugehörige Orthogonalität.}
\end{array}
$$

Folgerung E 7:
(a) $\mathcal{L}_2(\mathcal{A})$ und $\mathcal{L}_2(\mathcal{A}')$ sind Vektorräume mit $\mathcal{L}_2(\mathcal{A}') \subset \mathcal{L}_2(\mathcal{A})$.

(b) $(X,Y) \mapsto <X,Y>$ ist Skalarprodukt in $\mathcal{L}_2(\mathcal{A})$, insbesondere ist XY integrierbar.
(Aus $<X,X> = 0$, also $E(X^2) = 0$, folgt nur „$X = 0$ P-f.s.“, deshalb $\mathcal{L}_2$ statt L_2.)

(c) $E(X|\mathcal{A}')$ ist die Orthogonal-Projektion von X ($\in \mathcal{L}_2(\mathcal{A})$) auf $\mathcal{L}_2(\mathcal{A}')$,
d.h. für $X \in \mathcal{L}_2(\mathcal{A})$ gilt
(c1) $E(X|\mathcal{A}') \in \mathcal{L}_2(\mathcal{A}') \subset \mathcal{L}_2(\mathcal{A})$ und $X - E(X|\mathcal{A}') \in \mathcal{L}_2(\mathcal{A})$,
(c2) $X - E(X|\mathcal{A}') \perp Y$ für alle $Y \in \mathcal{L}_2(\mathcal{A}')$.



(d) $\|X - E(X|\mathcal{A}')\| = \min\{\|X - Y\| : Y \in \mathcal{L}_2(\mathcal{A}')\}$, $X \in \mathcal{L}_2(\mathcal{A})$.

(e) Für $\mathcal{A}' = \{\emptyset, \Omega\}$ ist $E(X|\mathcal{A}') = EX \cdot \mathbf{1}$ (mit $\mathbf{1} : \omega \mapsto 1$).
Für $\mathcal{A}' = \sigma(Z)$ mit $Z : \Omega \to \Omega'$, mb., ist $\mathcal{L}_2(\mathcal{A}') = \{g(Z)$ mit $g : \Omega' \to \overline{I\!R}$, mb., $g(Z)$ qu.int.$\}$.

Beweis (soweit nicht direkt ersichtlich):
Zu (a) und (b): $E|XY| < \infty$ folgt aus $E|XY| \le E(\max(X^2, Y^2)) \le E(X^2 + Y^2) < \infty$.

Zu (c1): Z.z. $E\left(E(X|\mathcal{A}')^2\right) < \infty$.
Definiert man (wie Var$X$) $\mathrm{Var}(X|\mathcal{A}') := E\left([X - E(X|\mathcal{A}')]^2|\mathcal{A}'\right) \ge 0$ (≥ 0 wg. E 4 (3)) ,
dann gilt $\mathrm{Var}(X|\mathcal{A}') = E(X^2|\mathcal{A}') - [E(X|\mathcal{A}')]^2 \ge 0$ (mittl. Term mit E 4 (5)) .
Daraus folgt (mit $E(E(Y|\mathcal{A}')) = EY$) $E(\mathrm{Var}(X|\mathcal{A}')) = E(X^2) - E\left([E(X|\mathcal{A}')]^2\right) \ge 0$,
also $\|E(X|\mathcal{A}')\|^2 = E\left([E(X|\mathcal{A}')]^2\right) \le E(X^2) < \infty$, für $X - E(X|\mathcal{A}')$ wg. Vektorraum.

Zu (c2) $<Y, X - E(X|\mathcal{A}')> = E\left(Y \cdot [X - E(X|\mathcal{A}')]\right) = E\left\{E\left(Y \cdot [X - E(X|\mathcal{A}')]|\mathcal{A}'\right)\right\} =$
$= E\left\{Y \cdot E\left(X - E(X|\mathcal{A}')|\mathcal{A}'\right)\right\}$ weil Y $\mathcal{A}'$-messbar ist
$= 0$ wegen $E\left(X - E(X|\mathcal{A}')|\mathcal{A}'\right) = E(X|\mathcal{A}') - E(X|\mathcal{A}') = 0$.

Zu (d): Sei $X_0 := E(X|\mathcal{A}')$. Dann gilt $\|X - Y\|^2 = E(X - Y)^2 = E\left((X - X_0) + (X_0 - Y)\right)^2$
$= E(X - X_0)^2 + 2E\left((X - X_0)(X_0 - Y)\right) + E(X_0 - Y)^2$.
Der mitttlere Ausdruck ist $= 0$ nach (c2), der letzte ≥ 0, also gilt (d).

Zu (e2): Siehe nächste Seite, Satz E 8.