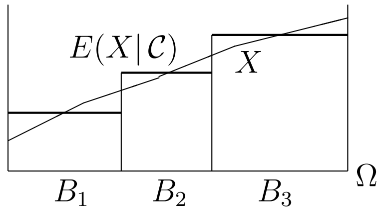
Gerhard Hübner, Universität Hamburg,
Fachbereich Mathematik, Schwerpunkt ST

Stochastische Prozesse I

E 1 Bedingte Erwartungswerte

Vorbemerkung: Zu einer bedingten Verteilung $P^{(X|Y=\cdot)}$ (Übergangs-W-Maß) definiert man
$E(X|Y=\cdot) = \int x\, P^{(X|Y=\cdot)}(dx)$, falls $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\overline{I\!R}, \overline{I\!B})$ P-quasi-integrierbar.
Wir betrachten hier $E(X|Y) := E(X|Y=\cdot)\circ Y$, eine $\sigma(Y)$-$\overline{I\!B}$-messbare ZV,
und deren Verallgemeinerung $E(X|\mathcal{C})$, wobei $\mathcal{C}$ eine Unter-σ-Algebra von $\mathcal{A}$ ist,
mit dem Spezialfall $E(X|Y) := E(X|\sigma(Y))$.

Beispiel E 1: Sei $\mathcal{C} := \sigma(\{B_1, B_2, \ldots\})$ mit $\Omega = \sum_{i=1}^{n[\infty]} B_i$,
X P-quasi-integrierbar.
Dann definiert man $E(X|\mathcal{C}) := \sum_{i=1}^{n[\infty]} [E(X\cdot 1_{B_i})/P(B_i)]\cdot 1_{B_i}$.
Daraus folgt $\omega \mapsto f(\omega) := E(X|\mathcal{C})(\omega)$ ist $\mathcal{C}$-messbar,
und es gilt $\int_C f(\cdot)\, dP = \int_C X\, dP$ $\forall C \in \mathcal{C}$ (hier $C = \sum_j B_{k_j}$).



Interpretation: Ein bed. Erwartungswert **vergröbert** die geg. ZV, maximal bei EX.

Satz E 2: Ist $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\overline{I\!R}, \overline{I\!B})$ P-quasi-integrierbar, $\mathcal{C}$ eine Unter-σ-Algebra von $\mathcal{A}$,
dann existiert ein $X_0 : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\overline{I\!R}, \overline{I\!B})$ – bis auf „P-f.s. =“ eindeutig – mit

$(*)$ X_0 ist $\mathcal{C}$-messbar und $\int_C X_0\, dP = \int_C X\, dP$ $\forall C \in \mathcal{C}$.

Beweisidee: Das Maß Q auf $(\Omega, \mathcal{C})$, definiert durch $Q(C) := \int_C X\, dP$ hat die Eigenschaft „mit $P(C)=0$ ist auch $Q(C)=0$“ (Q ist $P|_{\mathcal{C}}$-stetig). Daraus folgt mit dem Satz von Radon-Nikodym, dass Q eine $\mathcal{C}$-messbare, P-f.s. eindeutige P_0-Dichte X_0 besitzt.

Definition E 3: Jede der nach Satz E 2 existerenden Zufallsvariablen X_0 heißt **bedingter Erwartungswert von** X **unter** $\mathcal{C}$. Man schreibt $E(X|\mathcal{C}) := X_0$,
ohne Berücksichtigung der verschiedenen, aber P-f.s. gleichen Versionen von X_0.

Folgerung E 4: Eigenschaften von $E(X|\mathcal{C})$**.** Diese gelten alle (nur) P-f.s. (s. z.B. Bauer).

(1) $E(X|\{\emptyset, \Omega\}) = EX$, $E(X|\mathcal{A}) = X$. [Dies folgt direkt durch Einsetzen in $(*)$]

(2) $E(a\,X + b\,Y|\mathcal{C}) = a\,E(X|\mathcal{C}) + b\,E(Y|\mathcal{C})$. [Die Integrale in $(*)$ sind linear]

(3) $a \le X \le b \Rightarrow a \le E(X|\mathcal{C}) \le b$. [$C := \{E(X|\mathcal{C}) < a\}$ in $(*)$ $\Rightarrow$ $P(C)=0$]

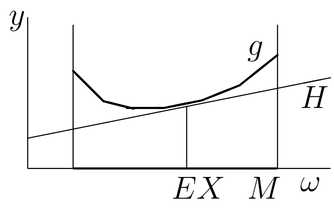
(4) Sei $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2 \subset \mathcal{A}$ $\Rightarrow$ $E\,[E(X|\mathcal{C}_2)|\mathcal{C}_1] = E(X|\mathcal{C}_1)$, speziell $E(E(X|\mathcal{C})) = EX$.
[Sei $\widetilde{X} := E(X|\mathcal{C}_2)$, $\widetilde{X}_0 := \ell.S.$, $C \in \mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2$ $\Rightarrow$ $\int_C \widetilde{X}_0\, dP =$
$\overset{(*)}{=} \int_C E(X|\mathcal{C}_2) dP \overset{(*)}{=} \int_C X dP \overset{(*)}{\Rightarrow} \widetilde{X}_0 = E(X|\mathcal{C}_1)$ (mit $(*)$ für $C \in \mathcal{C}_1$ / $C \in \mathcal{C}_2$ / $C \in \mathcal{C}_1$)]

(5) $E(X\,Y|\mathcal{C}) = X\,E(Y|\mathcal{C})$, falls X $\mathcal{C}$-messbar. Speziell $E(E(X|\mathcal{C})\cdot Y|\mathcal{C}) = E(X|\mathcal{C})\cdot E(Y|\mathcal{C})$.
[Mit $(*)$, z.z.: $\int_C X\,E(Y|\mathcal{C}) dP = \int_C X\,Y dP$ (Beweisprinzip für Integrale: $X = 1_C, \ldots$)]

(6) $E(X|\mathcal{C}) = EX$, falls $X, \mathcal{C}$ st.u., d.h. falls $X, 1_C$ st.u. für alle $C \in \mathcal{C}$.
[Mit $(*)$: $\int X\, 1_C\, dP \overset{\text{st.u.}}{=} EX \cdot E\,1_C = \int EX \cdot 1_C\, dP = \int_C EX dP = \ell.S.$]

(7) Monotone Konvergenz: $0 \le X_n \le Xn+1$, $X_n \to X$ $\Rightarrow$ $E(X_n|\mathcal{C}) \to E(X|\mathcal{C})$.
Majorisierte Konvergenz: $X_n \to X$, $|X_n| \le Y$, Y integrierbar $\Rightarrow$ $E(X_n|\mathcal{C}) \to E(X|\mathcal{C})$.

Satz E 5: Jensensche Ungleichung: (s. z.B. Bauer)
Sei $M \subset I\!R^d$, $\neq \emptyset$, konvex, $g : M \to I\!R$ konvex, messbar,
$X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (I\!R^d, I\!B^d)$ integr. mit $P^X(M) = 1$. Dann gilt:
(a) $EX \in M$ (sogar $EX \in M^{\text{off}}$, falls P^X nicht auf Hyperebene).
(b) $E(g \circ X)$ ex., $g(EX) \le E(g \circ X)$, $g(E(X|\mathcal{C})) \le E(g \circ X|\mathcal{C})$.



Beweis: Sei $K := \{(\omega, y) : \omega \in M,\ y \ge g(\omega)\}$ $\Rightarrow$ $\exists$ Hyperebene H durch $(EX, g(EX))$ mit $g \ge H$
$\Rightarrow E(g \circ X) \ge E(H \circ X) = H(EX) = g(EX)$.