Stochastische Prozesse I

Weitere Eigenschaften Brownscher Prozesse

Satz BP 6: Es gilt das **globale** und das **lokale Gesetz vom iterierten Logarithmus**:

$$P\left(\begin{matrix}\limsup_{t\to\infty} \\ \liminf_{t\to\infty}\end{matrix} X_t/\sqrt{2t\log\log t} = \begin{matrix}+1\\-1\end{matrix}\right) = 1\,,\quad P\left(\begin{matrix}\limsup_{h\downarrow 0} \\ \liminf_{h\downarrow 0}\end{matrix} \frac{X_{t_0+h}-X_{t_0}}{\sqrt{2h\log\log h^{-1}}} = \begin{matrix}+1\\-1\end{matrix}\right) = 1\,.$$

Satz BP 7: $(X_t - X_{t_0})$ besitzt $\forall\, t_0 \geq 0$ und $\forall\, h > 0$ in (t_0, t_0+h) unendlich viele Nullstellen.

Satz BP 8: (a) $P(X_t'$ existiert$) = 0\ \forall\, t$. (b) $P(\{\omega : \lambda(\{\,t : X_t'(\omega)$ existiert$\}) = 0\}) = 1$ (!)
(in Worten: „Fast jeder Pfad von (X_t) ist λ-fast nirgends differenzierbar.)

Beweis: (a) Da $\mathcal{L}(\frac{1}{h}(X_{t+h}-X_t)) = \mathcal{N}(0, \frac{1}{h})$, gilt $P(|\,\frac{1}{h}\,(X_{t+h}-X_t)\,| \leq M) \to 0\ (h\to 0)\ \forall\, M$.
(b) Sei $f(\omega,t)=1$, falls $X_t(\omega)$ differenzierbar in t, sonst $= 0$. Falls f messbar in (ω, t), folgt mit d. Satz von Fubini $E\,(\int_0^\infty f(\cdot,t)\,dt) = \int_0^\infty E\,(f(\cdot,t))\,dt = 0$, also $P\,(\int_0^\infty f(\cdot,t)\,dt = 0) = 1$.
Die Messbarkeit von $(\omega,t)\mapsto X_t(\omega)$ folgt aus der Pfadstetigkeit, die von f mit D^-, D^+.

Bemerkung BP 9: Aus dem Satz BP 8 folgt, dass fast jeder Pfad von (X_t) nicht von beschränkter Variation ist und damit auch nicht rektifizierbar, d.h. der zurückgelegte Weg eines Teilchens hat keine endliche Länge. Dies gilt so auch für mehrdimensionale Brownsche Prozesse. (Eine Abbildung von beschränkter Variation ist fast überall differenzierbar.)

Satz BP 10 Verteilung des Maximums eines Brownschen Prozesses:
Ist (X_t) ein Brownscher Prozess und $M_t := \max_{0\leq s\leq t} X_s$, so gilt:
$P(M_t \geq a) = 2P(X_t \geq a) = P(|\,X_t\,| \geq a) \quad (a \geq 0)\,.$

Beweis mit dem Spiegelungsprinzip und der starken Markoveigenschaft:
Sei $\tau_a := \inf\{t : X_t = a\}$. Dann ist τ_a Stoppzeit bzgl. X_t, d.h. $\{\tau_a \leq t\} \in \sigma(X_u,\, 0\leq u\leq t)$.
Wenn gezeigt ist, dass für (X_t) die starke Markov-Eigenschaft gilt, dann ist der Prozess $(Y_t) = (X_{\tau_a+t} - X_{\tau_a})$ ebenfalls ein Brown-Prozess, unabhängig von $(X_u,\, u\leq\tau_a)$ $(X_{\tau_a} = a\,!)$.
Der Prozess (X_t) wird nun nach der Zeit τ_a an $x = a$ gespiegelt.
Dadurch ändert sich die Verteilung des Prozesses nicht. Also gilt
$P(X_t > a\,|\,\tau_a \leq t) = P(X_t < a\,|\,\tau_a \leq t)$ und $P(X_t = a) = 0\,.$
$\Rightarrow\ P(M_t \geq a) = P(\tau_a \leq t, X_t \geq a) + P(\tau_a \leq t, X_t < a) =$
$= P(\tau_a \leq t, X_t \geq a) + P(\tau_a \leq t, X_t > a) = 2\,P(X_t \geq a)\,.$

Vom Brownschen Prozess abgeleitete Prozesse:

Definition BP 13: Ist (X_t) ein Brownscher Prozess, so heißt $(Y_t, t\in[0,1])$ mit $Y_t := X_t - tX_1$ eine **Brownsche Brücke**. Man erhält diese auch, wenn man bei dem Zugang nach Wiener den ersten Summanden weglässt.
Ist (Y_t) eine Brownsche Brücke, so ist $(X_t' := (1+t)\,Y_{t/(1+t)})$ ein Brownscher Prozess.
Die Brownsche Brücke hat die Kovarianzfunktion $Kov(Y_s, Y_t) = \min(s,t) - st\,.$

Bemerkung BP 14: Man kann über den Brownschen Prozess zufällige Integrale einführen, sog. **Itô-Integrale**. Dabei spielt jeder Pfad von (X_t) die Rolle einer Art maßdef. Funktion.
Itô-Integrale sind wichtige Bausteine zur Modellierung von Finanz-Zeitreihen.