Gerhard Hübner, Universität Hamburg,
Fachbereich Mathematik, Schwerpunkt ST

Stochastische Prozesse I

Der Brownsche Prozess

Geschichte: 1827 beobachtete Robert Brown die Molekülbewegung.
Um 1900 versuchen Bachelier und Einstein die mathematische Beschreibung.
1923 gelingt Norbert Wiener das erste exakte Modell.

Motivation: Modellierung der Bewegung eines Teilchens (in Flüssigkeiten/Gasen) als Stochastischer Prozess (X_t): Es ist sinnvoll, $T = \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ und $X_0 = 0$ zu setzen.
Aus der Annahme vieler kleiner Stöße folgt für X_t eine **Normal-Verteilung**.
Wegen der starken Viskosität (Dämpfung) kann man annehmen, dass die Verschiebungen in disjunkten Intervallen **unabhängig** sind. Aus Symmetrie-Betrachtungen folgt $EX_t = 0\ \forall\, t$.
Die Verschiebung $X_{t+s} - X_t$ soll nicht von t abhängen. Daraus folgt: $X_{t+s} - X_t \sim \mathcal{N}(0, f(s))$.
Wegen der Unabhängigen „Zuwächse" folgt $f(s+t) = f(s) + f(t)$ und damit $f(s) = b \cdot s$.
Schließlich sollen aus physikalischen Gründen die **Pfade** $t \mapsto X_t(\omega)$ **stetig** sein.

Definition BP 1: Ein **Brownscher Prozess** (oder **Wiener-Prozess**)
ist ein stochastischer Prozess $(X_t, t \in \mathbb{R}_+)$ mit
(1) $X_0 = 0$ P-f.s.,
(2) (X_t) besitzt unabhängige Zuwächse,
(3) $\mathcal{L}(X_{t+s} - X_t) = \mathcal{N}(0, bs)\ \forall\, s, t \geq 0$ (Standard: $b = 1$),
(4) Fast alle Pfade sind stetig in t.

Im folgenden wird zuerst die **Existenz** betrachtet, dann die **Eigenschaften**.

Folgerung BP 2: Ohne Voraussetzung (4) existieren solche Prozesse kanonisch,
mit Vorauss. (4) muss man Approximationen durch einfachere Prozesse heranziehen.
Die einfachste Möglichkeit benutzt zentrierte Binomial($\frac{1}{2}$)-Prozesse (linear ergänzt).
Wir betrachten zuerst den anschaulichen Zugang nach Wiener (s. Lamperti, Kap. 4).
Dieser hat den Vorteil, dass die Approximationsfolge für jedes feste t konvergiert (P-f.s.).
Dabei wird der Prozess aus „Dreiecksfunktionen" mit $\mathcal{N}(0,1)$-Gewichten zusammengesetzt.

Satz BP 3: Ist $X_t(\omega) := \sum_{n=0}^{\infty} g_n(t) Z_n(\omega)$ mit unabhängigen Gewichten $Z_n \sim \mathcal{N}(0,1)$,
und mit den Dreiecksfunktionen $g_0(t) = t\, 1_{[0,1]}$, $g_1(t) = x 1_{[0,1/2)}(x) + (1-x) 1_{[1/2,1)}(x)$,
allgemein für $n \geq 1$ mit $n = 2^m + k$, $m = 0, 1, \ldots$, $k = 0, 1, \ldots, 2^m - 1$
mit den Dreiecksfunktionen $g_{2^m+k}(t) = \Delta(k \cdot 2^{-m}, 2^{-(m+1)}, 2^{-(m/2+1)})$,
wobei $\Delta(a,b,c)(t) := c\,(t-a) 1_{[a,a+b)}(t) + c\,(2b - (t-a)) 1_{[a+b, a+2b)}(t)$,
dann **konvergiert** die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(t) Z_n(\omega)$ P-f.s. **gleichmäßig** (in t),
und $(X_t,\ t \in \mathbb{R}_+)$ ist ein **Brownscher Prozess auf $[0,1]$** (mit $b=1$).

Satz BP 4: $(1')$ Ein **Brownscher Prozess** (X_t) ist **zentriert**, d.h. es gilt $EX_t = 0\ \forall\, t$,
$(2')$ (X_t) besitzt die **„Kovarianzfunktion"** $\operatorname{Kov}(X_s, X_t) = E(X_s X_t) = \min(s,t)$,
$(3')$ (X_t) ist ein **„Gauß-Prozess"**, d.h. $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ ist normalverteilt $\forall\, (t_1, \ldots, t_n)$,
und die Eigenschaften $(1'), (2'), (3')$ sind äquivalent zu $(1), (2), (3)$.

Folgerung BP 5: (Y_t) mit $Y_0 = 0$, $Y_t = t \cdot X_{1/t}$ $(t \geq 0)$ ist ein Brownscher Prozess.

Beweis: Man zeigt die Eigenschaften $(1'), (2'), (3')$, zur Stetigkeit in 0 s.u.