Übungen zu Stochastische Prozesse I

Präsenzaufgabenblatt 3: Besprechung am Montag, 10. 11. 03

Aufgabe P 3.1:

Zeigen Sie unter den Voraussetzungen und der ersten Folgerung von Satz 4.7 (c):

Sei $K(i)$ abgeschlossen und $i_0 \in K(i)$.

Dann ist $(\hat{y}_j := f^*_{ji_0}, j \in K(i)\setminus\{i_0\},\ \hat{y}_{i_0} := 1)$ die kleinste Lösung von

$(*)\ y_j = \sum_{k\in K(i)} p_{jk}\, y_k,\ \ j \in K(i),\ j \neq i_0$

mit der Eigenschaft: $y_{i_0} = 1$ und $y_j \geq 0$.

die Äquivalenz (c3):

Es existiert ein $\tilde{j} \in K(i)$ mit $\tilde{j} \neq i_0$ und $f^*_{\tilde{j}i_0} < 1$

$\Longleftrightarrow$ $(*)$ hat eine beschränkte und nicht-konstante Lösung.

Hinweis: Für jede Lösung (y_j) von $(*)$ und $a, b \in I\!R$ ist auch $(a\, y_j + b)$ Lösung von $(*)$.

Aufgabe P 3.2:

Es sei X_n eine HMK mit $I = \{1, 2, 3\}$ und $p_{21} = p_{23} = p_{32} = 0$, sonst $p_{ij} > 0$.

(a) Zeigen Sie $m_{31} < \infty$

und unter Benutzung der starken Markov-Eigenschaft

$m_{32} = m_{31} + m_{12}$.

(b) Welche Struktur-Eigenschaften muss ein Übergangs-Graph besitzen, dass für drei Zustände i, j, k die (a) entsprechende Beziehung

$m_{ik} = m_{ij} + m_{jk}$ gilt?