Lineare Darstellungen von Symmetrischen Gruppen

150 232 (Holtkamp) 2st., Mi 12.00-14.00, NA 2/24

Beispiel 1. *Freies Monoid über Alphabet X*

Beispiel 2. $S_1, S_2, S_3, ...$

Satz 1. *(Bijektion zw. Partitionen von n und Konjugationsklassen von S_n)*

Satz 2. *($k_\lambda = ...$)*

Beispiel 3. *Triviale Darstellung, Sgn-Darstellung, Standard-Darstellung von S_n*

Beispiel 4. *Linksreguläre Darstellung ...*

Beispiel 5. $\mathbb{C}[\mathbf{1} + \mathbf{2} + ... + \mathbf{n}]$

Beispiel 6. $\mathbb{C}[\underline{3}] = \mathbb{C}[\mathbf{1} + \mathbf{2} + \mathbf{3}] \oplus \mathbb{C}[\mathbf{2} - \mathbf{1}, \mathbf{3} - \mathbf{1}]$ *als S_3-Modul.*

Satz 3. *(Maschke)*

Beispiel 7. $\mathbb{C}[\mathcal{H}], \mathcal{H} := \{H, (1,2)H, (1,3)H\},\ H = S(\{2,3\}) \leq S_3$

Lemma 1. *(Schur)*

Beispiel 8. M^λ

Satz 4. $\mathbb{C}[S_n\{t^\lambda\}]$ *isomorph zur Restklassendarstellung von S_n bzgl. S_λ.*

Beispiel 9. *Fixpunkte zählen...*

Satz 5. *(Charakter-Gleichungen erster Art [die Zeilen]).*

Beispiel 10. *Charaktertafel von S_3*

Satz 6. *Multiplizitäten in $\mathbb{C}[G]$.*

Satz 7. *(Charakter-Gleichungen der zweiten Art: die Spalten)*

Satz 8. $d_G^{(i)} \otimes d_H^{(j)}$ *eine vollständige Liste aller irreduziblen $G \times H$-Moduln.*

Beispiel 11. *Was ist $d_G = 1 \uparrow^G$, z.B. $1 \uparrow^G ((1,2))$?*

Satz 9. *(Induzierte Darstellung)*

Satz 10. *(Reziprozitätsgesetz von Frobenius)*

Satz 11. *(Geissinger-Bialgebra)*

Beispiel 12. S^λ

Satz 12. *(Untermodul-Theorem von James)*

Satz 13. *vollständige Liste der irreduziblen S_n-Moduln (über $\mathbb{C}$)*

7 Robinson-Schensted-Bijektion und Knuth-Relationen

Anmerkung:

Sei $\nu \vdash n$. Wenn die Polytabloide e_t, t Standard-Young-Tableaux der Gestalt ν, eine Basis von S^ν bilden, so ist die Anzahl f_ν der Standard-Young-Tableaux von Gestalt ν die Multiplizität von S^ν in der regulären Darstellung und (Satz 6)

$$\sum_{\lambda \vdash n} (f_\lambda)^2 = |S_n| = n!$$

[Bezüglich einer (Dominanz-)Ordnung für Polytabloide kann man zeigen, dass $\{t\}$ maximaler Term in e_t ist, wenn t Standard-Young-Tableaux. Also sind die e_t linear unabhängig. Aus der Gleichung lässt sich dann auch die Basiseigenschaft folgern.]

Ziel: Kombinatorischer Beweis dieser Gleichung, d.h. Bijektion zwischen Permutationen π und Paaren (P, Q) von Standard-Young-Tableaux der jeweils gleichen Gestalt λ, wobei λ die Partitionen von n durchläuft.

Definition.

Es sei P ein Standard Tableau von Gestalt einer Partition, in dem die Zahlen aus $\underline{n}$ höchstens einmal vorkommen (auch **Partielles Tableau** *genannt).*

Eine äußere Ecke der Gestalt von P ist eine Position $(i, j) \notin R(\lambda)$, so dass auch $R(\lambda) \cup (i, j)$ konvex ist.

Es gilt:

Kommt $x \in \underline{n}$ nicht in P vor, so erhält man durch folgenden "Row-Bumping"-Algorithmus ein neues partielles Tableau $r_x(P)$, in dem x vorkommt, und dessen Gestalt durch Hinzufügen einer äußeren Ecke entsteht:

(1) Setze $R :=$ erste Zeile von P

(2) Solange x kleiner ist als ein Element der Reihe R:
{ Ersetze das kleinste y Element von R, das größer als x ist durch x und benutze danach y als neues x, R die nächste Zeile. }
(3) [Nun ist x größer als jedes Element der Zeile R.]
Setze x an das Ende der Zeile R.
[Algorithmus-ENDE, letzte Position (i, j) nicht vergessen.]

Bsp:
1258 $\leftarrow x = \mathbf{3}$
47
6
9
12**3**8
47 $\leftarrow \mathbf{5}$
6
9
usw.
1238
45
6**7** (Position (3,2))
9

[klar: $r_x(P)$ hat weiterhin ansteigende Zeilen und Spalten]

Lemma.
Aus $r_x(P), (i, j) :=$ Endposition lassen sich wieder P und x gewinnen.

Denn: Man entfernt die Zelle (i, j) und nimmt sich den entsprechenden Eintrag x. Eine Zeile höher sucht man das grösste Element das kleiner als x ist, ersetzt es und nimmt es als neues x, usw.
(Zum Schluss ist man alle Zeilen durch und behält x.)

Definition.
Die Abbildung $\pi \mapsto^{RS} (P, Q)$ *wird nun wie folgt definiert:*
Sei $\pi = x_1 ... x_n$, $(P_0, Q_0) := (\emptyset, \emptyset)$.
Für $1 \leq k \leq n$ *entstehe* (P_k, Q_k) *aus* (P_{k-1}, Q_{k-1}) *durch Zeilen-Bumping und Buchführung über die Endposition* (i, j)*:*
$P_k = r_{x_k} P_{k-1}$, *und* Q_k *sei* $Q_{k-1} \cup$ *Zelle* (i, j) *mit Eintrag* k.

Nun $(P, Q) := (P_n, Q_n)$.

Bsp:
$\pi = 4236517$,
...[alle Schritte]...
$(P, Q) = (1357/26/4, 1347/25/6)$...

Zugehörige Worte π_P, π_Q bzgl. kanon. Numerierung (siehe auch unten):
4261357, 6251347.

Satz 14. *(Robinson-Schensted)*
Die Abbildung $\pi \mapsto^{RS} (P, Q)$ definiert eine Bijektion zwischen den Elementen von S_n und Paaren (P, Q) von Standard-Young-Tableaux der jeweils gleichen Gestalt λ, wobei λ die Partitionen von n durchläuft.

Beweis: Sukzessive Anwendung des Lemmas liefert die Umkehrabbildung.

$\square$

Anmerkung: Man kann zeigen:
Es ist $P(\pi^{-1}) = Q(\pi)$, $Q(\pi^{-1}) = P(\pi)$.
Es ist $P(x_n....x_2x_1) = P(x_1x_2...x_n)^t$ [transponiert].
[Um $Q(x_n....x_2x_1)$ aus $Q(x_1x_2...x_n)^t$ zu erhalten, benötigt man allerdings "Evacuation"-Algorithmus...]

Die RS-Bijektion lässt sich fortsetzen zu einer Bijektion
zwischen Paaren von Young-Tableaux mit Wiederholungen der gleichen Gestalt $\lambda \vdash n$ und (bestimmten) zweizeiligen Matrizen, siehe z.B. [W.Fulton, "Young Tableaux ", Cambridge Univ.Press 1997].

Definition.
Seien $\pi, \sigma \in S_n$.
Gilt, für beliebige $x < y < z$,
$\{\pi, \sigma\} = \{x_1...y\underline{xz}...x_n,\ x_1...y\underline{zx}...x_n\}$
bzw. $= \{x_1...\underline{xz}y...x_n,\ x_1...\underline{zx}y...x_n\}$
so sagt man π und σ unterscheiden sich durch eine **Knuth Relation** *(1.Art bzw. 2.Art), π und σ sind* **plaktische Nachbarn**, *bez. $\pi_K \smile \sigma$.*

[Zur Verdeutlichung kann man statt ${}_K\smile$ einen waagerechten Strich zeichnen und daran k schreiben, wenn σ aus π durch Transposition des k-ten und $(k+1)$-ten Buchstabens hervorgeht.]
Bsp: $42531 \overset{2}{\text{——}} 45231 \overset{4}{\text{——}} 45213 \overset{2}{\text{——}} 42513 \overset{3}{\text{——}} 42153$

Die Äquivalenzrelation, die von dieser (symmetrischen) Relation ${}_K\smile$ erzeugt wird, heißt Knuth-Äquivalenz oder plaktische Äquivalenz, bez. ${}_K\sim$. Die Äquivalenzklasse von π, die sogenannte **plaktische Klasse** *von π wird mit ${}_K[\pi]$ bezeichnet.*

Dual definiert man $\pi \smile_K \sigma$ *(koplaktische Nachbarn)* $:\iff \quad \pi^{-1}\ {}_K\!\smile \sigma^{-1}$.

Explizit: (Duale Knuth Relation 1.Art:)
$\pi = ...(k+1)...k...(k+2)... \smile_K \sigma = ...(k+2)...k...(k+1)...$
(Duale Knuth Relation 2.Art:)
$\pi = ...k...(k+2)...(k+1)... \smile_K \sigma = ...(k+1)...(k+2)...k...$
Die erzeugte Äquivalenzrelation heißt Duale Knuth-Äquivalenz oder koplaktische Äquivalenz, bez. $\sim_K$. *Die Äquivalenzklasse von* π, *die sogenannte* **koplaktische Klasse** *von* π *wird mit* $[\pi]_K$ *bezeichnet.*

[Zur Verdeutlichung kann man statt $\smile_K$ *einen senkrechten Strich zeichnen und daran* i *schreiben, wenn* σ *aus* π *durch Tauschen von* i *und* $i+1$ *hervorgeht.]*

52413
|2
53412
|4
43512
|2
42513
|3
32514

Die von ${}_K\!\sim$ *und* $\sim_K$ *zusammen erzeugte Äquivalenzrelation wird mit* $\sim$ *bezeichnet. Ihre Äquivalenzklassen heißen* **Teppiche**.

Bsp: Plaktische Klassen in S_3*:* $\{\mathrm{id}\}, \{213, 231\}, \{132, 312\}, \{321\}$;
Koplaktische Klassen in S_3*:* $\{\mathrm{id}\}, \{213, 312\}, \{132, 231\}, \{321\}$.
Ein (kleiner) Teppich:

$$\begin{array}{ccc} 213 & \text{——} & 231 \\ | & & | \\ 312 & \text{——} & 132 \end{array}$$

Satz 15. *(Knuth)*
(i) Es ist $P(\pi) = P(\sigma) \iff \pi\ {}_K\!\sim \sigma$.
(ii) Es ist $Q(\pi) = Q(\sigma) \iff \pi \sim_K \sigma$.

Bsp: $P(213) = P(231) = \binom{13}{2}$, $P(132) = P(312) = \binom{12}{3}$, $P(321) = 123^t$
$Q(213) = Q(312) = \binom{13}{2}$, $Q(132) = Q(231) = \binom{12}{3}$,

Beweis-Skizze:
(ii) Folgt leicht aus (i), wenn man gezeigt hat, dass $P(\pi^{-1}) = Q(\pi)$, $Q(\pi^{-1}) = P(\pi)$.

(i)
$\Leftarrow$:
wir untersuchen Fall 1:

π und σ unterscheiden sich durch eine Knuth Relation 1.Art:

$$\pi = x_1...y\underline{xz}...x_n, \sigma = x_1...y\underline{zx}...x_n$$

Fall 2, $\sigma = x_1x_2...x_n$ und $\pi = (k, k+1)\sigma$ unterscheiden sich durch eine Knuth-Relation 2.Art, lässt sich darauf zurückführen (Es unterscheiden sich $\sigma^r := x_n...x_2x_1$ und π^r durch eine Knuth-Relation 1.Art - mit Anmerkung folgt direkt, dass $P(\pi)^t = P(\sigma)^t$, also auch $P(\pi) = P(\sigma)$).

Fall 1: $\pi = x_1...y\underline{xz}...x_n, \sigma = x_1...y\underline{zx}...x_n$. Sei P das Tableau, das durch Einsetzen der Buchstaben vor y entsteht; dann ist zu zeigen, dass $r_zr_xr_y(P) = r_xr_zr_y(P)$.

Wir führen Induktion über die Zeilenanzahl von P.

Ist $P = \emptyset$, so ergeben beide Seiten dasselbe Tableau $\binom{xz}{y}$.

Nun sei $r > 0$ die Zeilenanzahl von P und sei $\bar{P} := r_y(P)$.

Stößt y den Eintrag y' aus Spalte k, so gilt:

(*) $\bar{P}_{1,j} \leq y$ für alle $j \leq k$ und

(**) $\bar{P}_{1,l} > y'$ für alle $l > k$.

Wenden wir nun r_x $(x < y)$ an, so kommt x in eine Spalte j mit $j \leq k$, und das herausgestoßene x' ist $< y'$ (wegen *). Anschließend wenden wir $r_z(z > y)$ an, und stoßen analog ein $z' > y'$ aus einer Spalte rechts von Spalte k.

In der ersten Zeile ist es also gleich, in welcher Reihenfolge r_x und r_z angewendet werden. Auf das aus den letzten $r-1$ Zeilen bestehende Tableau P' von P wird dann je nach Reihenfolge von r_x und r_z entweder $r_{z'}r_{x'}r_{y'}$ oder $r_{x'}r_{z'}r_{y'}$ angewendet. Nach Induktion kommt in beiden Fällen das gleiche Ergebnis heraus.

$\Rightarrow$

Für jedes P mit zugehörigem Wort $\pi_P \in SYT^\lambda$ (s.u.) ist $P(\pi_P) = P$.

(Denn: Folgt aus Konstruktion des Row-Bumpings.)

Nun genügt es zu zeigen: $\pi \ _K\!\sim \pi_P$ falls $P(\pi) = P$.

[sei z.B. $\pi = 231$, dann finden wir $\pi_P = 213$]

Man führt Induktion über die Anzahl der Buchstaben von $\pi =: x_1...x_{k-1}x_k$. Sei $\pi' = x_1...x_{k-1}$ und $P' = P(\pi')$.

Induktionsschritt: Es genügt zu zeigen, dass $\pi_{P'}x_k \ _K\!\sim \pi_P$.

Sind $Z_1, ..., Z_l$ die Zeilen von P', und $Z_1 = p_1p_2...p_m$ mit $p_{j-1} < x_k < p_j$, so ist:

$\pi_{P'}x_k = Z_l...Z_2p_1p_2...p_mx_k \smile ..[1.Art].. \smile Z_l...Z_2p_1p_2...p_{j-1}p_jx_kp_{j+1}...p_m$
$\smile ..[2.Art].. \smile Z_l...Z_2p_jp_1p_2...p_{j-1}x_kp_{j+1}...p_m$.

Nun ist $p_1p_2...p_{j-1}x_kp_{j+1}...p_m$ gerade die erste Zeile von $r_x(P') = P$ und das Row-Bumping von p_j in die restlichen Zeilen entspricht weiter genau den Knuth-Relationen, so dass man am Ende zu π_P gelangt.

$\square$

Dabei ist, für jede Gestalt R (mit n Zellen), jedes Standard Young Tableau der Gestalt R durch das entsprechende Wort $\pi = \pi(1)....\pi(n)$ aus S_n bestimmt, das abgelesen wird entsprechend der kanonischen Numerierung $\iota_R : \underline{n} \to (R, \to)$ der Zellen (zeilenweise, unten links beginnend).

Ist α die Abbildung, die jeder Zelle x ihren Eintrag $\alpha(x)$ zuordnet, so ist $\pi = \alpha \circ \iota_R$.

Die Menge SYT^R aller Standard Young Tableaus der Gestalt R ist gegeben durch

$\big\{\pi \in S_n : \text{für } \alpha := \pi \circ \iota_R^{-1}, x \neq y \text{ Zellen mit } x \leq_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} y, \text{ ist } \alpha(x) < \alpha(y)\big\}$.

Sei $\lambda = 2.2.1 \vdash 5$ und $R = R(\lambda)$. Dann gilt:

SYT^R ist die koplaktische Klasse

52413
|2
53412
|4
43512
|2
42513
|3
32514.

Satz 16. *(i) Für jeden Rahmen $R = R(\lambda\backslash\tilde{\lambda})$, $|R| = n$, ist SYT^R eine Vereinigung von koplaktischen Klassen in S_n.*

(ii) Für $\lambda \vdash n$ ist SYT^λ eine koplaktische Klasse in S_n.

Beweis:

(i) Sei $\pi \in SYT^R$, $\alpha := \pi \circ \iota_R^{-1}$. Zu zeigen: Jeder koplaktische Nachbar $\rho = (k, k+1) \circ \pi$ von π ist auch Element von SYT^R.

Für alle Zellen $x <_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} y$ müssen wir also zeigen, dass

$$(k, k+1)\big(\alpha(x)\big) < (k, k+1)\big(\alpha(y)\big).$$

Fall 1: $\{\alpha(x), \alpha(y)\} \neq \{k, k+1\}$

Sei $\alpha(x) \notin \{k, k+1\}$ (analog behandelt man $\alpha(y) \notin \{k, k+1\}$). Somit $(k, k+1)\big(\alpha(x)\big) = \alpha(x) < \alpha(y)$. Möglicherweise ist $(k, k+1)\big(\alpha(y)\big) < \alpha(y)$. Dann ist aber $\alpha(y) = k+1$ und $(k, k+1)\big(\alpha(y)\big) = k$. Nach Voraussetzung ist $\alpha(x) < \alpha(y)[= k+1]$, also $(k, k+1)\big(\alpha(x)\big) = \alpha(x) < k = (k, k+1)\big(\alpha(y)\big)$ (wegen Vor. Fall 1).

Fall 2: Andernfalls ist $\alpha(x) = k$, $\alpha(y) = k+1$.

Sei (1.Art): $\pi = ...k...(k-1)...(k+1)...$, $\rho = ...(k+1)...(k-1)...k...$ (bzw. erstes ρ, zweites σ).

Sei $u \in R$ mit $\alpha(u) = k-1$. Also $\pi^{-1}(\alpha(x)) < \pi^{-1}(\alpha(u)) < \pi^{-1}(\alpha(y))$ (bzw. $\pi^{-1}(\alpha(x)) > \pi^{-1}(\alpha(u)) > \pi^{-1}(\alpha(y))$).

Nun folgt $x \to u \to y$ (bzw. $y \to u \to x$), da $\pi^{-1} \circ \alpha = \iota_R^{-1}$.

Da die Teilmenge $\{x, u, y\} = \alpha^{-1}\{k-1, k, k+1\}$ von R ein Rahmen ist [konvex bzgl. $\leq_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$ im Standard Young Tableau], und da $x <_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} y$, folgt:

x, u, y kommen [aufeinanderfolgend] in der gleichen Zeile (bzw. gleichen Spalte) vor, und es ist auch $x \leq_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} u \leq_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} y$.

Dies führt zum Widerspruch, da dann $\alpha(x) = k \leq \alpha(u) = k-1$ sein müsste.

Für (2.Art) erhält man ebenso einen Widerspruch,

so dass der Fall $\{\alpha(x), \alpha(y)\} = \{k, k+1\}$ gar nicht auftreten kann.

(ii) Wir zeigen [s. nächste Woche] mit Induktion über n, dass für alle $\pi, \rho \in S_n$ gilt:

$$\pi, \rho \in SYT^\lambda \Rightarrow \pi \sim_K \rho.$$