Julian Holstein
Seminar zur Topologie (Bachelor)
Sommersemester 2022

1 Seminar über Topologie und Gruppen

In diesem Seminar beschäftigen wir uns mit dem Zusammenspiel von Topologie und Gruppen, insbesondere betrachten wir zahleiche Beispiele von topologischen Gruppen, ihre besonderen Eigenschaften und Anwendungen. Aber auch Gruppoide, Gruppenwirkungen und Quotientenräume spielen eine Rolle.

Sie sollten für die Teilnahme am Seminar jedenfalls Topologie und idealerweise Algebra gehört haben, es gibt allerdings eine Reihe unterschiedlicher Themen mit unterschiedlichen Voraussetzungen.

Das Seminar richtet sich grundsätzich an Bachelorstudierende. Auf Antrag können Sie das Seminar auch als Student*in im Master besuchen, bzw. sich das Seminar für den Master anrechnen lassen. Dazu sollten Sie dann in Absprache mit mir ein entsprechend anspruchsvolles Vortragsthema wählen.

Unterrichtssprache ist Deutsche, die meisten Quellen sind aber auf Englisch.

2 Vortragsthemen

1. **Topologische Gruppen I.** Die Kategorie der topologischen Gruppen, Homogenität von Gruppen und Quotientenräumen. [[Higgins] Abschnitt II.1 mit Beispielen, Abschnitt 2 Proposition 0.(i) und Proposition 1.(i).]

2. **Topologische Gruppen II.** Zusammenhang und Strukturresultate. [[Higgins] Abschnitt II.6, Abschnitt II.7 insbesondere Theorem 1.]

3. **Proendliche Gruppen.** Konstruktion, Charakterisierung und Beispiele. [[Higgins] Abschnitt II.9, insbesondere Theorem 3, Beispiele $\mathbb{Z}_p$ sowie $\hat{\mathbb{Z}} = \lim_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/n = \prod \mathbb{Z}_p$.]

4. *** Anwendung auf die Galois-Theorie** Erinnerung an den Hauptsatz der Galoistheorie, Galois-Korrespondenz für unendliche Körpererweiterungen. [Z. B. [Szamuely] Abschnitt 1.3, insbesondere Theorem 1.3.11 (ohne Beweis) und Beispiel 1.3.7.1.]

5. **Gruppenwirkungen** Stetige Gruppenwirkung, Definitionen und Beispiele [[Laures-Szymik] Abschnitt 5.1 sowie Satz 5.2, erstes Beispiel auf S. 90, Beispiel auf S. 96.]

6. **Fundamentalgruppoid.** Grouppoide, Homotopieinvarianz des Fundamentalgruppoiden und Vergleich zur Fundamentalgruppe. [[Laures-Szymik] Abschnitt 7.1, insbesondere Absatz 7.3, Folgerung 7.6.]

7. **Seifert-van Kampen für Gruppoide.** Aussage (ohne Beweis), Vergleich mit und Herleitung von Seifert-van Kampen für Gruppen, Berechnug von $\pi_1(S^1)$. [[Laures-Szymik] Abschnitt 7.2.]

8. **Möbius-Transformationen** Dreifache Transitivitität, Matrixdarstellung, Erzeugende, Visualisierungen. [[Beardon] 13.1, Theorem 13.2.1, 13.8; Beardon erwähnt keine Topologie, definieren Sie die offensichtliche Topologie auf der Möbius-Gruppe und zeigen, dass die Wirkung auf $\mathbb{C}_\infty$ stetig ist; für Visualisierungen schauen Sie sich im Internet um.]

9. * **Lokal kompakte abelsche Gruppen**. Definition, Beispiele, Pontryagin-Dual einer Gruppe und die Dualität von S^1 und $\mathbb{Z}$. [[Morris] Abschnitte 4 & 5 sowie eventuell Abschnitt 6; Sie sollten die von Morris skizzierten Berechnungen der dualen Gruppe weiter ausführen.]

10. **Lie-Gruppen I: Einführung.** Definition von glatten Mannigfaltigkeiten und Lie-Gruppen, erste Beispiele. [[Sepanski] 1.1.1, 1.1.2, Theorem 1.10.]

11. **Lie-Gruppen II: Die klassischen Lie-Gruppen** Unitäre, orthogonale und symplektische Gruppen; Homotopieäquivalenz $O(n) \simeq GL(n, \mathbb{R})$. [[Sepanski] Abschnitt 1.1.4, Übungen 1.6, 1.7 & 1.9.]

12. **Lie-Gruppen III: Elementare Topologie**. Zusammenhang, universelle Überlagerung, Fundamentalgruppen. [[Sepanski] 1.2.1, 1.2.2, Übung 1.18 & 1.19.]

13. * **Lie-Gruppen IV: Spin.** Clifford-Algebren und die Gruppe Spin. [[Sepanski] 1.3.1, 1.3.2.]

14. * **Lie-Gruppen V: Darstellungstheorie.** Darstellungen von Lie-Gruppen, Irreduzibilität, Darstellungen von $SU(2)$ auf homogenen Polynomen. [[Sepanski] Abschnitte 2.1.1, 2.1.2.1, 2.1.2.2, 2.2.2, 2.3.1.]

15. **Homogene Räume.** Projektive Räume, Grassmann-Mannigfaltigkeiten, Stiefel-Mannigfaltigkeiten. [[Laures-Szymik] Abschnitt 5.2, insbesondere Beispiele; [Hilgert-Neeb] Abschnitt 10.1.3 (ohne Beweise) und 10.1.4.]

16. * ***H*-Räume** Definition und Beispiele für H-Räume, inbesondere der Schleifenraum, Eckmann-Hilton-Argument. [[Hatcher] Abschnitt 3.C S. 281-2 und Übungen 3 und 5, vgl. Topologie Übung 12.2; Spanier Abschnitt 1.5 S. 37-39 für eine ausführliche Behandlung des Schleifenraums.]

Es gibt 11 zentrale Themen und 5 Sternchen-Themen, von denen wir je nach Teilnehmerzahl 2 oder 3 sehen werden.

Die Themen bauen teils aufeinander auf. Meist genügen Definitionen und oberflächliches Verständnis des ersten Themas um einen Vortrag zum zweiten Thema vorzubereiten. Es gelten die folgenden Zusammenhänge:

$$
\begin{tikzcd}
 & 5 \arrow[r] & 8 \arrow[rr] & & 15 & \\
1 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] \arrow[ddr, bend right] & 2 \arrow[r] \arrow[dr] & 10 \arrow[r] & 11 \arrow[r] \arrow[ur] & 12 \arrow[r] & 13 \\
 & 9 & 3 \arrow[r] & 4 & & \\
 & 16 & & 6 \arrow[r] & 7 &
\end{tikzcd}
$$

Abgesehen von diesen Abhängigkeiten kann die Reihenfolge der Themen bei Bedarf verändert werden.

3 Zu den Vorträgen

Die Literaturangaben beziehen sich auf die Inhalte, mit denen Sie sich vornehmlich beschäftigen sollen. Oft is es ratsam, nur eine Auswahl des Materials der Quelle vorzubereiten, solange sie die Stichpunkte in der Beschreibung sorgfältig behandeln.

Es kann sein, dass sie etwas um die angegeben Abschnitte herum lesen müssen um notwendigen Hintergrund zu erwerben (z.B. Definitionen). An einigen Stellen müssen Sie etwas über die Literatur hinaus arbeiten (etwa Details ergänzen oder Übungsaufgaben lösen), dabei dürfen Sie sich gerne mit Fragen an mich wenden.

Zusätzliche Quellen können Sie gerne verwenden.

Wünschenswerte Vorkenntnisse (dies sind Vorkenntnisse, die Ihnen die Vorbereitung erleichtern sollten, die Sie aber nicht bei Ihrer Zuhörerschaft voraussetzen sollten):

- Sie sollten Algebra gehört haben für Thema 3, 4, 5.
- Sie sollten ein gutes Verhältnis zu elementarer Kategorientheorie haben (etwa wie in meinem Topologiekurs) für Thema 3, 6, 7.
- Ein bissschen Differenzialgeometrie hilft bei Thema 10, ein bisschen Darstellungstheorie bei Thema 14.

Senden Sie mir bitte bis zum 17.3. (eine Woche nach Ende der Anmeldephase) eine Liste der Themen, die sie interessant finden, am besten 5 Themen in Reihenfolge Ihrer Präferenz. Schreiben Sie mir am besten auch, ob Sie Algebra gehört haben und welchen Topologie-Kurs Sie gehört haben.

Sagen Sie unbedingt Bescheid, wenn Sie das Seminar in den Master einbringen wollen. Dafür wären wahrscheinlich die Themen 4, 9, 12, 13, 14 oder 16 geeignet.

4 Seminarleistung

Nachdem Sie ein Thema erhalten haben, bereiten Sie bitte einen 80-minütigen Vortrag vor. Sie können mich jederzeit mit Fragen zum Inhalt Ihres Vortrags kontaktieren. Zwei Wochen vor ihrem Vortrag schicken Sie mir bitte eine schriftliche Ausarbeitung, die wir dann in einem Vorgespräch besprechen. Dort klären wir auch verbleibende Fragen, die Sie noch zum Thema haben. Ihre Ausarbeitung sollten Sie auch bei oder nach Ihrem Vortrag an die Seminarteilnehmer*innen verteilen.

Sie sollten auch zu den anderen Vorträgen kommen, und sich mit Fragen beteiligen. Wenn Sie einen Termin verpassen müssen, sagen Sie bitte vorher Bescheid.

Literatur

[Beardon] Alan Beardon, *Algebra and Geometry*, Cambridge University Press (2005).

[Hatcher] Allen Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press (2009).

[Higgins] P. J. Higgins, *An Introduction to Topological Groups*, Cambridge University Press (1975).

[Hilgert-Neeb] Joachim Hilgert, Karl-Hermann Neeb, *Structure and Geometry of Lie Groups*, Springer Monographs in Mathematics (2011).

[Laures-Szymik] Gerd Laures, Markus Szymik, *Grundkurs Topologie*, Springer Lehrbuch (2009).

[Morris] Sidney Morris, *Duality and Structure of Locally Compact Abelian Groups for the Layman*, Math. Chronicle 8 (1979) 39-56, availble at https://sidneymorris.net/Morris53.pdf.

[Sepanski] Mark Sepanski, *Compact Lie Groups*, Springer GTM (2007).

[Szamuely] Tamasz Szamuely, *Galois Groups and Fundamental Groups*, Cambridge Univiersity Press (2009).