Blatt 6

Übung 6.1 (1+1+1+1+1+1 Punkte)

Bestimmen Sie (mit kurzer Begründung), ob die folgenden Räume kompakt sind.

(a) Sei X eine beliebige Menge mit der koendlichen Topologie.

(b) Sei $X = [0, 1] \times [0, 1] \setminus \{(1, 1)\}$.

(c) Sei $X = A \amalg B$ wobei A ein beliebiger kompakter Raum ist und B ein beliebiger nicht kompakter Raum.

(d) Sei X eine topologische Summe von endlich vielen kompakten Räumen.

(e) Sei X ein endlicher CW-Komplex.

(f) * Sei $X = O(n)$ die Menge aller orthogonalen Matrizen in $\mathbb{R}^{n^2}$ mit der Unterraumtopologie.

Übung 6.2 (4 Punkte)

Beweisen Sie direkt (ohne den Satz von Tychonoff zu zitieren und ohne die Verwendung von Filtern):

Das Produkt zweier nicht-leerer topologischer Räume ist genau dann kompakt, wenn jeder der Faktoren kompakt ist.

Hinweis: Beweisen Sie den Satz zuerst für offene Überdeckungen, die aus Basiselementen bestehen.

Übung 6.3 (1+2 Punkte)

(a) Sei X ein topologischer Raum und F ein Filter auf X. Zeigen Sie, dass die Menge aller Berührpunkte von F gleich $\cap_{Y \in F} \overline{Y}$ ist.

(b) Seien X, Y topologische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung, sodass das Bild jedes Filters F auf X, der gegen $x \in X$ konvergiert, gegen $f(x)$ konvergiert. Zeigen Sie, dass f stetig in x ist.

Übung 6.4 (1+1+2+1+1+1 Punkte)

Wir definieren die Cantormenge wie folgt: Sei $A_0 = [0,1]$. Für jede Menge I sei $T(I) = \frac{1}{3}(I \cup I+2) = \{x \mid \exists a \in I \text{ so dass } x = \frac{1}{3}a \text{ oder } \exists b \in I \text{ so dass } x = \frac{1}{3}(b+2)\}$. Dann sei $A_{i+1} = TA_i$. Insbesondere ist $TA_0 = [0,\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3},1]$.

(a) Sei $C = \cap_{i=0}^{\infty} A_i$. Zeige dass die Elemente von C genau die Zahlen der Form $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i 3^{-i}$ mit $a_i \in \{0,2\}$ sind.

(b) Zeigen Sie, dass C kompakt ist.

(c) Konstruieren Sie eine stetige Bijektion f von C nach $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ und zeigen Sie, dass dies ein Homöomorphismus ist.

(d) Konstruieren Sie eine stetige Surjektion von C nach $[0,1]$.

(e) Zeigen Sie, dass C homöomorph zu $C \times C$ ist.

(f) * Folgern Sie, dass es eine stetige Surjektion $[0,1] \to [0,1] \times [0,1]$ gibt. Kann es eine stetige Bijektion geben?

Abgabetermin ist die Vorlesung am 23.11.2021.

Die Punktzahl der Aufgaben entspricht nur sehr ungefähr ihrer Schwierigkeit. Insbesondere sind Aufgaben mit Sternchen zum Vergnügen da. Sie sind möglicherweise schwieriger als andere Fragen, aber Ihre Punktzahl wird kaum leiden, wenn Sie die Aufgabe nicht lösen.