Blatt 13

Übung 13.1 (2+3+2 Punkte)

(a) Definieren Sie eine Wirkung von $\mathbb{Z}^2$ auf $\mathbb{R}^2$ durch $(a,b).(x,y) = (x+a, y+b)$. Zeigen Sie, dass dies eine Überlagerungswrikung ist. Beschreiben Sie den Quotienten.

(b) Wir betrachten eine Gruppe G mit zwei Erzeugern a und b und einer Relation r, die wie folgt auf $\mathbb{R}^2$ operiert:

$$a.(x,y) = (x+1, y) \quad \text{und} \quad b.(x,y) = (-x, y+1)$$

Beschreiben Sie $\mathbb{R}^2/G$. Betrachten Sie hierzu zuerst das Bild von $[0,1]\times[0,1]$ in $\mathbb{R}^2/G$.

Finden Sie eine Relation r so dass eine Überlagerungswirkung von $G = \langle a, b \mid r\rangle$ auf $\mathbb{R}^2$ vorliegt.

(c) Zeigen Sie, dass G isomorph zur Fundamentalgruppe von $\mathbb{R}^2/G$ ist.

Übung 13.2 (2+3)

(a) Sei $(\tilde{X}, \tilde{x}) \to (X, x)$ eine Überlagerung. Sei $\tilde{x}'$ ein Punkt in $p^{-1}(x)$ und w ein Weg von $\tilde{x}$ nach $\tilde{x}'$. Zeigen Sie, dass die Untergruppen $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$ und $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}'))$ in $\pi_1(X, x)$ konjungiert sind.

(b) Sei $(\tilde{X}, \tilde{x}) \to (X, x)$ eine Überlagerung und H eine Untergruppe von $\pi_1(X, p\tilde{x})$, die zu einer Untergruppe $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$ konjugiert ist. Zeigen Sie, dass es einen Punkt $\tilde{x}' \in p^{-1}(p\tilde{x})$ gibt, so dass $H = p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}'))$ gilt.

Übung 13.3 (1)

Ein Bild hängt an einem Nagel an der Wand. Um das Bild besser abzusichern, kann man einen zweiten Nagel einschlagen und das Bild an einer Schnur über beide Nägel hängen. Wenn ein Nagel entfert wird hängt das Bild noch (schief) am anderen Nagel.

Zeigen Sie, dass man die Schnur des Bildes so über beide Nägel wickeln und hängen kann, dass das Bild herunterfällt, sobald einer der Nägel entfernt wird.

Übung 13.4 (1)

* Betrachten Sie den Kleeblatt-Knoten $K : S^1 \subset S^3$. Wir können K definieren, indem wir zuerst $S^1 \to S^1 \times S^1$ durch $z \mapsto (z^2, z^3)$ definieren und dann $S^1 \times S^1$ in S^3 einbetten.

Was ist die Fundamentalgruppe von $S^3 \setminus K$?

Hinweis: Es gilt $S^3 \cong S^1 \times D^2 \amalg_{S^1 \times S^1} D^2 \times S^1$.

Die letzten beiden Aufgaben sind klausurähnlich. Beantworten Sie sie bitte mit kurzer Begründung.

Übung 13.5 (3)

Sei $X = S^2$ und x_1, x_2, x_3, x_4 vier unterschiedliche Punkte von X. Was ist die Fundamentalgruppe von $X \setminus \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$?

Übung 13.6 (3)

Gibt es eine stetige Surjektion $S^3 \to \mathbb{R}$?

Gibt es eine stetige Surjektion $S^3 \to [0, 1]$?

Abgabetermin ist die Vorlesung am 25.1.2021.

Die Punktzahl der Aufgaben entspricht nur sehr ungefähr ihrer Schwierigkeit. Insbesondere sind Aufgaben mit Sternchen zum Vergnügen da. Sie sind möglicherweise schwieriger als andere Fragen, aber Ihre Punktzahl wird kaum leiden, wenn Sie die Aufgabe nicht lösen.