Julian Holstein
Topologie (Bachelor)
Wintersemester 2021/22

Blatt 10

Übung 10.1 (3+3+2+2+2) Punkte

Wir definieren den Grad einer stetigen Abbildung $f : S^1 \to S^1$ wie in Definition 2.5.4. Erinnern Sie sich an die Konstruktion der Hochhebung aus der Vorlung und beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Zeigen Sie, dass jede Funktion $w_f : \mathbb{R} \to S^1$ definiert durch $x \mapsto f(e^{2\pi i x})$ eine Hochhebung hat, es existert also $\hat{w}_f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $E \circ \hat{w}_f = w_f$.

Zeigen Sie weiterhin, dass $\operatorname{grad}(f) = \hat{w}_f(1) - \hat{w}_f(0)$ ist.

(b) Seien $f, g \colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ zwei stetige Abbildungen. Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{grad}(f \circ g) = \operatorname{grad}(f)\ \operatorname{grad}(g)\,.$$

Berechnen Sie die Abbildung $f_* : \pi_1(S^1, 1) \to \pi_1(S^1, 1)$ für eine beliebige stetige Abbildung $f : S^1 \to S^1$.

(c) Für eine stetige Abbildung $f \colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ definieren wir stetige Abbildungen $-f, \overline{f} \colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ durch

$$(-f)(z) := -f(z) \quad \text{und} \quad \overline{f}(z) := \overline{f(z)} \quad \forall\, z \in \mathbb{S}^1\,.$$

Bestimmen Sie $\operatorname{grad}(-f)$ und $\operatorname{grad}(\overline{f})$.

(d) Beweisen Sie, dass $\operatorname{grad}(f) = \pm 1$ für jeden Homöomorphismus $f \colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$. Gilt dies auch für Homotopieäquivalenzen $f \colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$?

(e) Beweisen Sie, dass jede stetige Abbildung $f \colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ mit $\operatorname{grad}(f) \neq 0$ surjektiv ist. Gilt die Umkehrung dieser Aussage?

Übung 10.2 (5 Punkte)

Es sei $f \colon [0,1] \to \mathbb{S}^1$ ein stetig differenzierbarer geschlossener Weg. Das heißt $f : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ ist stetig differenzierbar und das Bild von f ist in S^1 enthalten.

Nehmen Sie an, dass f eine stetig differenzierbare Hochhebung $\omega_f \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ hat. Beweisen Sie die Identität

$$\operatorname{grad}(f) = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_0^1 f(t)^{-1} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

* Vergleichen Sie die Umlaufzahl aus der Vorlesung mit der Definition der Umlaufzahl aus der Funktionentheorie.

Übung 10.3 (3 Punkte)

Seien A_0, A_1 und A_2 abgeschlossene Teilmengen von S^2 mit $S^2 = A_0 \cup A_1 \cup A_2$.

Benutzen Sie den Satz von Borsuk-Ulam um zu zeigen, dass es $x \in S^2$ und $i \in \{0, 1, 2\}$ gibt mit $x \in A_i$ und $-x \in A_i$.

Hinweis: Übung 1.3 ist nützlich für diese Aufgabe.

Übung 10.4 (1 Punkt)

Wir definieren $\pi_n(X, x_0) = [I^n, \partial I^n; X, x_0]$ für $n \geq 1$. Insbesondere ist das kompatibel mit unser Definition von $\pi_1(X, x_0)$ aus der Vorlesung.

* Konstruieren Sie eine Gruppenstruktur auf $\pi_n(X, x_0)$. Zeigen Sie, dass $\pi_n(X, x_0)$ für alle $n \geq 2$ abelsch ist.

Abgabetermin ist die Vorlesung am 4. Januar 2020.

Die Punktzahl der Aufgaben entspricht nur sehr ungefähr ihrer Schwierigkeit. Insbesondere sind Aufgaben mit Sternchen zum Vergnügen da. Sie sind möglicherweise schwieriger als andere Fragen, aber Ihre Punktzahl wird kaum leiden, wenn Sie die Aufgabe nicht lösen.