Julian Holstein
Topologie (Bachelor)
Wintersemester 2021/22

Blatt 1

Übung 1.1 (3+2 Punkte)

Wir definieren für $x, y \in \mathbb{R}^2$ die Abbildung $\| - \| \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$, $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ (also der Euklidische Abstand vom Ursprung) und setzen

$$d(x,y) = \begin{cases} \|x-y\|\,, & x \text{ und } y \text{ liegen auf einer Geraden durch } 0 \\ \|x\| + \|y\|\,, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass d eine Metrik auf $\mathbb{R}^2$ definiert.

(b) Skizzieren Sie die offenen Kugeln $B_r(x)$ für $r > 0$ und $x \in \mathbb{R}^2$.

Diese Metrik heißt auch Französische Eisenbahnmetrik. Wieso?

Übung 1.2 (2 Punkte)

Zeigen Sie in einem beliebigen metrischen Raum ein Beispiel für einen unendlichen Durchschnitt offener Mengen, der nicht offen ist.

Finden Sie eine unendliche Vereinigung abgeschlossener Mengen, die nicht abgeschlossen ist.

Übung 1.3 (1+4+2 Punkte)

(a) Eine Abbildung $f \colon X \to Y$ zwischen metrischen Räumen (X, d_X) und (Y, d_Y) heißt *Lipschitz-stetig*, wenn es eine Konstante $L > 0$ gibt, sodass

$$d_Y\big(f(x), f(y)\big) \leq L \cdot d_X(x,y) \quad \forall\, x, y \in X\,.$$

Beweisen Sie, dass Lipschitz-Stetigkeit Stetigkeit impliziert.

(b) Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$ eine nichtleere Teilmenge.

Gegeben sei ein Punkt $x \in X$. Zeigen Sie dass $d(x, -) : X \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion ist.

Wir setzen

$$d(x, A) \coloneqq \inf\{d(x,y) \mid y \in A\}\,.$$

Zeigen Sie, dass $d(-, A)$ eine stetige Funktion auf (X, d) definiert.

Beschreiben Sie die Menge $(d(-, A))^{-1}(\{0\})$.

(c) Zeigen Sie, dass für $A, B \subset X$ zwei nichtleere, disjunkte, abgeschlossene Teilmengen von X stetige Funktionen $h\colon X \to \mathbb{R}$ existieren, die die Eigenschaft besitzen, dass $h^{-1}(\{0\}) = A$ und $h^{-1}(\{1\}) = B$.

Übung 1.4 (2+2+2 Punkte)

Es sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl. Für $z \in \mathbb{Z}$ definieren wir $\nu_p(z) := \sup\{n \in \mathbb{N}_0 \mid p^n \text{ teilt } z\}$. Wir verwenden die übliche Konvention, dass $p^{-\infty} = 0$.

(a) Beweisen Sie, dass

$$d_p(x, y) := p^{-\nu_p(x-y)} \quad \forall\, x, y \in \mathbb{Z}$$

eine Metrik auf $\mathbb{Z}$ definiert, die die starke Form der Dreiecksungleichung aus Problem 0.4 erfüllt.

(b) Beschreiben Sie die ϵ-Bälle um $0 \in \mathbb{Z}$. Was sagt der Abstand von $x \in \mathbb{Z}$ zu Null über x und p aus?

(c) Sei $p = 5$. Definieren Sie eine konvergente Folge in einem metrischen Raum, indem Sie die Definition aus der Analysis übertragen.

Was ist der Grenzwert von 2019, 20019, 200019, ...?

* Konvergiert $p_n = 1 + 5 + \cdots + 5^n$?

Abgabetermin ist die Vorlesung am 19.10.2019.

Die Punktzahl der Aufgaben entspricht nur sehr ungefähr ihrer Schwierigkeit. Insbesondere sind Aufgaben mit Sternchen zum Vergnügen da. Sie sind möglicherweise schwieriger als andere Fragen, aber Ihre Punktzahl wird kaum leiden, wenn Sie die Aufgabe nicht lösen.