Julian Holstein
Seminar zur Topologie (Bachelor)
Sommersemester 2020

1 Übersicht

Das Thema des Seminars ist:

"Differentialformen in der algebraischen Topologie"

Dieses Seminar ist eine zweite Einführung in die algebraischen Topologie. Ein möglicher Slogan ist: Wir verwenden Analysis um algebraische Invarianten für topologische Räume zu finden.

Die topologischen Räume in diesem Kurs sind Mannigfaltikeiten (Sphären, Tori, etc.).

In diesem Seminar werden wir einige Themen aus dem Buch „Differential Forms in Algebraic Topology"von Bott & Tu behandeln, beginnend mit Differentialformen und de Rham-Kohomologie. Weitere mögliche Themen sind Vektorbündel, Poincaré-Dualität, der Thom-Isomorphismus und Čech-Kohomologie.

Voraussetzungen: Sie sollten Topologie und Algebra gehört haben und sich noch an die multidimensionale Analysis erinnern. Vertrautheit mit den Konzepten ist wichtiger als Detailkenntnisse.

2 Vorträge

1. Einführung (JH). Was ist de Rham-Kohomologie?
2. Differenzialformen und de Rham-Komplex von $\mathbb{R}^n$. Pullback und de Rham-Funktor für euklidische Räume. Berechnung für $\mathbb{R}^1$. [BT §1 S. 13-16 bis Example 1.5(c) und §2 S. 19-20 bis vorletzte Formel auf S. 20]
3. Differenzierbare Mannigfaltigkeiten, mit Beispielen. Differenzialformen auf Mannigfaltigkeiten, de Rham-Funktor. Zerlegung der Eins. [BT §2 S. 20-22, bei Bedarf zusätzliche Quellen]
4. Differenzialkomplexe und lange exakte Sequenz. Mayer-Vietoris Sequenz. De Rham Kohomologie für S^1. [BT §1 S. 16-17 und §2 S. 22-25]
5. Orientierung. Integration und Stokes' Theorem. [BT §3, S. 27-33]
6. Poincaré-Lemma. Homotopie-Invarianz für de Rham-Kohomologie. [BT §4 S. 33-37]
7. De Rham-Kohomologie und Poincaré-Lemma für kompakte Träger. [BT §1 S. 17-19, 25-27 und §37-40]
8. Das Mayer-Vietoris-Argument. Endlichdimensionalität von de Rham-Kohomologie. Künneth-Theorem (ohne Diskussion von Faserbündeln). [BT §5 S. 42-44 und 47-50]

9. * Poincaré-Dualität. Poincaré-Dual von Untermannigfaltigkeiten (nur abgeschlossen). [BT §5 S. 44-47 und 50-53]
10. Vektorbündel. Tangentenbündel. Orientierbarkeit. Direkte Summe von Vektorbündeln. Pullback. Homotopie-Invarianz. [BT §6 S. 53-59]
11. * Kohomologie mit kompaktem Träger für Vektorbündel. Kompakte vertikale Kohomologie. Integration entlang der Fasern. Projektionsformel. Thom-Isomorphismus. [BT §6 S. 59-64]
12. * Thom-Klasse. Normales Bündel und Poincaré-Dualität. Dachprodukt und transversaler Schnitt. [BT §6 S. 64-69]
13. * Euler-Klasse. Beispiele. [BT §6 S. 70-78]
14. * Doppelkomplexe. Verallgemeinertes Mayer-Vietoris Argument. [BT §8 S. 89-97 bis Ende des Beweises]
15. * Čech-Kohomologie. [BT §8 S. 97-99 und §10 S. 108-112]

Sternchen bezeichnen komplexere Vortragsthemen (geeignet für Masters-Studierende).

Einige der späteren Themen können abegändert, zusammengefasst oder ausgelassen werden.

Die Themen des Seminars bauen aufeinander auf. Das folgende Diagramm drückt einige Abhängigkeiten aus. (Meist genügen Definitionen und oberflächliches Verständnis des ersten Themas um einen Vortrag zum zweiten Thema vorzubereiten.)

$$\begin{tikzcd}
 & & & & 8 \arrow[r] \arrow[dr] & 14 \arrow[r] & 15 & \\
2 \arrow[r] & 3 \arrow[r] \arrow[drr, bend right] \arrow[ddrr] & 4 \arrow[r] & 6 \arrow[r] \arrow[ur] & 7 \arrow[r] & 9 \arrow[dd] & & \\
 & & & 5 \arrow[urr, bend right] & & & & \\
 & & & 10 \arrow[rr] & & 11 \arrow[r] & 12 \arrow[r] & 13
\end{tikzcd}$$