

# Topologie (Bachelor)

Wintersemester 2019/20

Julian Holstein

Universität Hamburg  
Fachbereich Mathematik

(Stand: 30. Januar 2020)

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Mengentheoretische Topologie</b>	<b>1</b>
1.1	Einleitung . . . . .	1
1.2	Metrische Räume . . . . .	2
1.3	Offene und abgeschlossene Mengen . . . . .	4
1.4	Topologische Räume . . . . .	8
1.5	Vergleich von Topologien . . . . .	10
1.6	Unterräume . . . . .	12
1.7	Abgeschlossene Hülle und offener Kern . . . . .	14
1.8	Basen, Subbasen, Umgebungsbasen . . . . .	16
1.9	Abzählbarkeit . . . . .	19
1.10	Initialtopologie und Produkt . . . . .	20
1.11	Finaltopologie und Summe . . . . .	24
1.12	Quotientenräume . . . . .	26
1.13	Hausdorffsche Räume . . . . .	28
1.14	Zusammenhang . . . . .	30
1.15	Wegzusammenhang . . . . .	34
1.16	Mehr über Quotientenräume . . . . .	37
1.17	Kompaktheit . . . . .	40
1.18	Filter . . . . .	44
1.19	Filter und Kompaktheit . . . . .	48
1.20	Abbildungsräume . . . . .	49
1.21	Kategorien . . . . .	50
1.22	Limes und Kolimes . . . . .	52
1.23	Limes und Kolimes von topologischen Räumen . . . . .	54
1.24	Normale Räume und Urysohn's Lemma . . . . .	58
<b>2</b>	<b>Einführung in die algebraische Topologie</b>	<b>61</b>
2.1	Homotopien . . . . .	61
2.2	Fundamentalgruppen . . . . .	64
2.3	Fundamentalgruppe des Kreises . . . . .	68
2.4	Anwendungen . . . . .	70
2.5	Satz von Seifert-van Kampen . . . . .	75
2.6	Pushouts von Gruppen . . . . .	75
2.7	Anwendungen des Satzes von Seifert-van Kampen . . . . .	80
2.8	Fundamentalgruppe des projektiven Raumes . . . . .	83
2.9	Gruppenwirkungen auf topologischen Räumen . . . . .	84
2.10	Faserbündel und Überlagerungen . . . . .	86

2.11	Hochhebungen und Faserungen . . . . .	89
2.12	Überlagerungen und Fundamentalgruppen . . . . .	91
2.13	Äquivalenz von Überlagerungen . . . . .	95
2.14	Die universelle Überlagerung . . . . .	97
2.15	Deckbewegungen . . . . .	100
2.16	Klassifikationssatz für Überlagerungen . . . . .	103
2.17	$G$ -Überlagerungen . . . . .	106
2.18	Abstieg und Beweis des Satzes von Seifert-van Kampen . . . . .	109
<b>A</b>	<b>Erinnerungen und Ergänzungen</b>	<b>111</b>
A.1	Das Zornsche Lemma . . . . .	111
A.2	Das Lebesguesche Lemma . . . . .	111
<b>B</b>	<b>Notation</b>	<b>112</b>
<b>C</b>	<b>Glossar englischer Begriffe</b>	<b>112</b>

## Literatur:

- B. von Querenburg, *Mengentheoretische Topologie*, Springer 2001
- G. Laures, M. Szymik, *Grundkurs Topologie*, Spektrum, 2009
- R. Stöcker, H. Zieschang, *Algebraische Topologie*, Teubner 1994
- J. Munkres, *Topology*, Prentice-Hall 1975
- A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press 2001
- L.A. Steen, J.A. Seebach, *Counterexamples in Topology*, Dover 1995

Dies ist das Skript für eine Topologie-Vorlesung an der Universität Hamburg im Wintersemester 2019/20. Es basiert auf dem Skript von Christoph Schweigert, das wiederum auf Birgit Richters Vorlesung basiert. Ich danke meinen Vorgängern. Christoph Schweigerts Skript ist unter <https://www.math.uni-hamburg.de/home/schweigert/ws15/tskript.pdf> erhältlich.

Für Korrekturen und Bemerkungen bin ich sehr dankbar, selbst wenn es sich um vermeintliche Kleinigkeiten handelt. Bitte emailen Sie an [julian.holstein@uni-hamburg.de](mailto:julian.holstein@uni-hamburg.de).

Vielen Dank an Lennart Fitschen, , Nicola Lorenz, Moritz Mucke, Nicolas Pich Preuss, Jakob Stegemann und N. N. für hilfreiche Kommentare.

Die aktuelle Version dieses Skriptes finden Sie unter <http://www.math.uni-hamburg.de/home/holstein/lehre/Top19Skript.pdf> als pdf-Datei.

# 1 Mengentheoretische Topologie

## 1.1 Einleitung

Topologie ist ein fundamentales Teilgebiet der Mathematik. Objekt der Topologie sind die *topologischen Räume* und die *stetigen Funktionen* zwischen ihnen. Topologische Räume sind mathematische Strukturen, geometrische Objekte im weitesten Sinne, die uns nur bis auf stetige Verformungen interessieren. Es geht um qualitative, nicht quantitative Eigenschaften des Raumes. Zwei Räume, die sich stetig ineinander verformen lassen (Verformungen ohne Reisen und Kleben) sind für uns also äquivalent. Man vergleiche den alten Witz, dass ein Topologe jemand ist, der den Unterschied zwischen einem Doughnut und einer Kaffeetasse nicht kennt. Korrekt ist natürlich, dass ein Topologe oder eine Topologin den Unterschied kennt, aber die Gemeinsamkeiten interessanter findet.

Um diese Ideen präzise zu machen werden wir sehr sorgfältig und abstrakt arbeiten. Schon die Definition topologischer Räume und ihrer wichtigen Eigenschaften ist nicht ganz einfach.

Sie kennen stetige Funktionen von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$ , oder von  $\mathbb{R}^m$  nach  $\mathbb{R}^n$ , oder zwischen Untermengen dieser Räume. Der natürliche Lebensraum stetiger Funktionen sind topologische Räume. Also ist die Topologie eine Verallgemeinerung der Analysis.

Als nächstes ist die Topologie Grundlage der Geometrie in all ihren Formen (Differenzialgeometrie, komplexe Geometrie, algebraische Geometrie, arithmetische Geometrie, Lie Gruppen etc.). Ein topologischer Raum mit zusätzlicher Struktur wird zu einem geometrischen Objekt.

Aufgrund ihrer Verformbarkeit lassen sich topologische Räume schwer unterscheiden und klassifizieren, entscheidende Hilfe kommt aus der Algebra. Die Anwendung von Algebra auf Probleme der Topologie ist so fruchtbar, dass wir von einem neuen Teilgebiet, der *algebraischen Topologie* sprechen, die die elementare oder mengentheoretische Topologie an Bedeutung weit übertrifft. In der zweiten Hälfte dieses Kurses werden wir uns mit Grundzügen der algebraischen Topologie befassen.

Die Beziehung von Algebra und Topologie ist aber keinesfalls einseitig, Topologie und algebraische Topologie haben zahlreiche Anwendungen auf die Algebra, und haben wesentlich zur Entwicklung neuer Bereiche beigetragen, insbesondere homologische Algebra, Kategorientheorie und das Studium sogenannter "höherer Strukturen".

Topologie findet Anwendung in allen Bereichen der modernen Mathematik, ob Funktionalanalysis oder Zahlentheorie, algebraische Geometrie oder mathematische Physik. Wir werden im Laufe des Kurses erahnen, was Topologie so mächtig macht. Insbesondere beweisen wir fast nebenbei die folgenden beiden fundamentalen Sätze:

**Satz 1.1.1** (Brouwer's Fixpunktsatz). *Sei  $f : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]^2$  eine stetige Funktion. Dann gibt es  $x \in [0, 1]^2$  mit  $f(x) = x$ .*

Für  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  ist dies ein Korollar des Zwischenwertsatzes. Für den Fixpunktsatz in beliebiger Dimension müssen Sie auf den Master-Kurs über algebraische Topologie warten.

**Satz 1.1.2** (Fundamentalsatz der Algebra). *Sei  $f(x)$  ein nichtkonstantes Polynom mit komplexen Koeffizienten. Dann gibt es  $x_0 \in \mathbb{C}$  mit  $f(x_0) = 0$ .*

## Ein paar Worte zur Geschichte

Die Topologie ist ein recht junges Teilgebiet der Mathematik. Insbesondere die moderne Formulierung der Grundbegriffe der mengentheoretischen Topologie hat sich relativ spät herausgebildet.

Ein paar Namen und Daten, die Sie gerne gleich wieder vergessen dürfen:

- Erste Ideen bei Leonhard Euler (Königsberger Brückenproblem 1736, Eulerscher Polyedersatz 1750)
- Johann Benedict Listing (Begriff *Topologie* 1847, Möbiusband), Bernhard Riemann (Mannigfaltigkeiten, Geschlecht, Habilitationsvortrag 1854), Ludwig Schläfli (*vielfache Kontinuität*, Polyeder),
- Georg Cantors Mengenlehre und sein Studium von Intervallen sind einflussreich
- Anfänge der algebraischen Topologie bei Enrico Betti und insbesondere Henri Poincaré (*Analysis Situs* 1895)
- Definition des metrischen Raums durch Maurice Fréchet 1906, cf. Kapitel 1.2.
- Explizite Definition eines *topologischen Raumes* über den Umgebungsbegriff durch Felix Hausdorff 1914 (heute Hausdorfscher Raum, cf. Definition 1.3.2 und Satz 1.3.5).
- Moderne Definition topologischer Räume durch Kazimierz Kuratowski erst 1922, cf. Kapitel 1.4 (als die Topologie schon ein lebhafter Forschungsbereich war).

## 1.2 Metrische Räume

Wir beginnen, indem wir den Abstandsbegriff aus der Analysis abstrahieren.

**Definition 1.2.1.** Ein **metrischer Raum** ist eine Menge  $X$ , zusammen mit einer Funktion

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

mit den folgenden Eigenschaften:

1. Positivität:  $d(x, y) \geq 0$  für alle  $x, y \in X$  und  $d(x, y) = 0$  genau dann, wenn  $x = y$ .
2. Symmetrie:  $d(x, y) = d(y, x)$  für alle  $x, y \in X$ .
3. Dreiecksungleichung:

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \text{für alle } x, y, z \in X .$$

Die reelle Zahl  $d(x, y)$  für  $x, y \in X$  heißt auch der **Abstand** von  $x$  und  $y$ ,

**Beispiele 1.2.2.** Die folgenden Räume sind metrische Räume:

1.  $(\mathbb{R}^n, d_2)$  mit  $d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$  für alle  $x = (x_i), y = (y_i) \in \mathbb{R}^n$ . Das ist die **Standardmetrik** oder **euklidische Metrik**.
2.  $(\mathbb{R}^n, d_1)$  mit  $d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$  wird manchmal Manhattan-Metrik oder Mannheimer Metrik genannt.
3.  $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$  mit  $d_\infty(x, y) = \max_{i=1, \dots, n} |x_i - y_i|$ .
4. Allgemein, ist für jeden normierten Vektorraum die Funktion  $d(x, y) = \|x - y\|$  eine Metrik.
5. Auf einer beliebigen Menge  $X$  gibt es immer die **diskrete Metrik**

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{falls } x \neq y \end{cases}$$

6. Auf dem Raum  $C([0, 1], \mathbb{R})$  der stetigen reellwertigen Funktionen auf dem Intervall  $[0, 1]$  definiert man eine Metrik  $d_1(f, g) := \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$ .
7. Sei  $X = \mathbb{Z}$  und definiere  $d_p(a, a) = 0$  und andernfalls  $d_p(a, b) = p^{-N}$  wobei  $N = \max\{n \mid n \text{ teilt } |a - b|\}$ . Das ist die  $p$ -adische Metrik. (Sie lässt sich auf  $\mathbb{Q}$  ausweiten)
8. Sei  $Y$  eine beliebige endliche Menge und  $X$  die Menge aller Untermengen. Die symmetrische Differenz von zwei Menge  $A$  und  $B$  ist  $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ . Dann definiert  $d(A, B) = |A \Delta B|$  eine Metrik auf  $X$ , die sogenannte **Hamming-Distanz**.
9. Sei  $X$  die Menge aller Zeichenketten über einem Alphabet. Man definiere die **Levenshtein-Distanz** von  $s_1$  nach  $s_2$  als die minimale Anzahl der Editierungen (Einfügung, Austauschung, Löschung) um  $s_1$  in  $s_2$  umzuwandeln.

**Bemerkungen 1.2.3.**

1. Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum,  $Y \subset X$  eine Teilmenge. Dann versteht die Einschränkung  $d|_{Y \times Y}$  die Teilmenge  $Y$  mit der Struktur eines metrischen Raumes.
2. Sind  $(X_1, d_1)$  und  $(X_2, d_2)$  metrische Räume, so hat auch das kartesische Produkt  $X_1 \times X_2$  durch

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) := d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$$

die Struktur eines metrischen Raums.

Sie haben also eine reiche Auswahl an Beispielen für metrische Räume. Wir wenden uns nun den Abbildungen zwischen metrischen Räumen zu.

**Definition 1.2.4.** Seien  $(X, d)$  und  $(X', d')$  metrische Räume. Eine Abbildung  $f : X \rightarrow X'$  heißt **stetig im Punkt**  $x \in X$ , wenn es zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt, so dass aus  $d(x, y) < \delta$  folgt  $d'(f(x), f(y)) < \epsilon$ .

Die Abbildung  $f$  heißt **stetig**, wenn sie in allen Punkten  $x \in X$  stetig ist.

### Beispiele 1.2.5.

1. Jede stetige Abbildung  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (im Sinne von Analysis) ist natürlich stetig als Abbildung zwischen metrischen Räumen mit der Standardmetrik.
2. Die Identitätsabbildung und jede Verknüpfung stetiger Funktionen sind immer stetig.

## 1.3 Offene und abgeschlossene Mengen

Wir untersuchen nun unsere metrischen Räume genauer, um ein allgemeineres Verständnis vom Stetigkeitsbegriff zu erreichen.

**Definition 1.3.1.** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum,  $x \in X$  und  $\epsilon > 0$ . Dann definieren wir die Teilmenge  $B_\epsilon(x) := \{y \in X \mid d(x, y) < \epsilon\}$ , die **offene Kugel** vom Radius  $\epsilon$  um  $x$ .

**Definition 1.3.2.** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum.

1. Eine Teilmenge  $U \subset X$  heißt eine **Umgebung** eines Punktes  $x \in X$ , wenn es ein  $\epsilon > 0$  gibt, so dass  $B_\epsilon(x) \subset U$  gilt, d.h. wenn  $U$  eine offene Kugel um  $x$  enthält.
2. Eine Teilmenge  $O \subset X$  heißt **offen**, wenn es für jedes  $x \in O$  ein  $\epsilon > 0$  gibt, so dass  $B_\epsilon(x) \subset O$  gilt. Das ist genau dann der Fall wenn die Teilmenge  $O$  eine Umgebung jedes ihrer Punkte ist.
3. Eine Teilmenge  $A \subset X$  heißt **abgeschlossen**, falls das Komplement  $X \setminus A$  offen ist.

Die unvermeidliche Warnung: Ein und dieselbe Menge kann sowohl offen als auch abgeschlossen sein. Oder weder offen noch abgeschlossen. Sie werden sich daran gewöhnen.

**Lemma 1.3.3.** Jede offene Kugel  $B_\epsilon(x)$  in einem metrischen Raum ist offen und insbesondere eine Umgebung von  $x$ .

*Beweis.* Sei  $y \in B_\epsilon(x)$  ein beliebiger Punkt in der Kugel. Setze  $\epsilon' := \epsilon - d(x, y) > 0$ . Dann ist  $B_{\epsilon'}(y) \subset B_\epsilon(x)$ . Für jedes  $z \in B_{\epsilon'}(y)$  gilt  $d(z, y) < \epsilon'$  also ist  $d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x) < \epsilon' + d(x, y) = \epsilon$  und  $z \in B_\epsilon(x)$ .  $\square$

**Bemerkung 1.3.4.** Für jeden Punkt  $x$  in einem metrischen Raum  $(X, d)$  ist die Menge  $\{x\}$  abgeschlossen. Für  $y \in X \setminus \{x\}$  wähle  $0 < \epsilon \leq d(x, y)$ . Dann ist  $B_\epsilon(y) \subset X \setminus \{x\}$ . Also ist das Komplement  $X \setminus \{x\}$  offen.

**Satz 1.3.5.** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Dann gilt:

- (U1) Jede Umgebung von  $x \in X$  enthält auch  $x$ . Der metrische Raum  $X$  selbst ist eine Umgebung von  $x$ .
- (U2) Ist  $U$  Umgebung von  $x \in X$  und  $V \supset U$ , so ist auch  $V$  Umgebung von  $x$ .
- (U3) Sind  $U_1, U_2$  Umgebungen von  $x \in X$ , so auch ihr Schnitt  $U_1 \cap U_2$ .

(U4) Ist  $U$  Umgebung von  $x \in X$ , so gibt es eine weitere Umgebung  $V$  von  $x$ , so dass  $U$  eine Umgebung von allen  $y \in V$  ist.

*Beweis.* Die Aussagen (U1) und (U2) sind klar. Für (U3) finde offene Kugeln  $B_{\epsilon_i}(x) \subset U_i$  für  $i = 1, 2$ . Dann ist  $B_{\min(\epsilon_1, \epsilon_2)}(x) \subset U_1 \cap U_2$  und  $\min(\epsilon_1, \epsilon_2) > 0$ .

Zum Beweis von (U4) bemerken wir, dass es  $\epsilon > 0$  gibt, so dass  $B_\epsilon(x) \subset U$  gilt. Dann ist  $V := B_\epsilon(x)$  Umgebung jedes Punktes in  $V$ , also ist es auch  $U$ .  $\square$

**Satz 1.3.6.** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Dann gilt

(O1) Die Mengen  $\emptyset, X$  sind offen.

(O2) Mit zwei Mengen  $O_1, O_2$  ist auch ihr Schnitt  $O_1 \cap O_2$  offen.

(O3) Für eine beliebige Familie  $(O_i)_{i \in I}$  offener Mengen ist auch die Vereinigung  $\cup_{i \in I} O_i$  offen.

*Beweis.* (O1) Für  $\emptyset$  ist die leere Bedingung erfüllt. Für  $X$  folgt die Aussage aus (U1) aus Satz 1.3.5.

(O2) Für jeden Punkt  $x \in O_1 \cap O_2$  finde offene Kugeln  $B_{\epsilon_i}(x) \subset O_i$  für  $i = 1, 2$ . Dann ist  $B_{\min(\epsilon_1, \epsilon_2)}(x) \subset O_1 \cap O_2$  und somit ist der Schnitt  $O_1 \cap O_2$  offen. Mit genauem Hingucken folgt die Aussage auch aus (U2) in Satz 1.3.5.

(O3) Liegt  $x \in \cup_{i \in I} O_i$ , so gibt es wenigstens  $i \in I$  mit  $x \in O_i$ . Da  $O_i$  offen ist, gibt es  $\epsilon > 0$  mit  $B_\epsilon(x) \subset O_i$ . Dann ist auch  $B_\epsilon(x) \subset \cup_{i \in I} O_i$ .  $\square$

**Bemerkung 1.3.7.** Zu (O2) bemerken wir dass allgemein alle *endlichen* Schnitte offener Mengen offen sind. (Das folgt durch Inspektion des Beweises oder Induktion.)

Der nächste Satz folgt direkt aus den *de Morganschen Regeln*: das Komplement einer Vereinigung ist der Schnitt der Komplemente,

$$X \setminus \cup_{i \in I} U_i = \cap_{i \in I} (X \setminus U_i) ;$$

Das Komplement eines Schnitts ist die Vereinigung der Komplemente,

$$X \setminus \cap_{i \in I} U_i = \cup_{i \in I} (X \setminus U_i) .$$

**Korollar 1.3.8.** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Dann gilt

(A1) Die Mengen  $\emptyset, X$  sind abgeschlossen.

(A2) Mit zwei Mengen  $A_1, A_2$  ist auch ihre Vereinigung  $A_1 \cup A_2$  abgeschlossen.

(A3) Für eine beliebige Familie  $(A_i)_{i \in I}$  abgeschlossener Mengen ist auch der Schnitt  $\cap_{i \in I} A_i$  abgeschlossen.

*Beweis.* Wir betrachten Komplemente:

(A1) Es gilt  $\emptyset = X \setminus X$  und  $X = X \setminus \emptyset$  und  $X$  und  $\emptyset$  sind nach Satz 1.3.6 (O1) offen.

(A2) Die Komplementmengen  $O_i := X \setminus A_i$  sind offen. Nach Satz 1.3.6 (O2) ist somit

$$X \setminus (A_1 \cup A_2) = (X \setminus A_1) \cap (X \setminus A_2) = O_1 \cap O_2$$

offen.

(A3) Die Mengen  $O_i := X \setminus A_i$  sind offen. Nach Satz 1.3.6 (O3) ist

$$X \setminus \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} X \setminus A_i = \bigcup_{i \in I} O_i$$

offen. □

**Bemerkung 1.3.9.** Da abgeschlossene Mengen genau die Komplemente von offenen Mengen sind, können wir jeden Satz über offene Mengen in einen Satz über abgeschlossene Mengen übersetzen. Wir müssen dabei nur die Richtung von Teilmengen umkehren (denn  $A \subset B$  wird  $B^C \subset A^C$ ) und, nach den de Morganschen Regeln, Schnitte und Vereinigungen vertauschen. Da wir den Beweis genauso übersetzen können bekommen wir zwei Sätze zum Preis von einem. Dies ist ein wichtiges Beispiel für **Dualität**.

Ein Grund für die Einführung von Umgebungen, offenen Mengen und geschlossenen Mengen ist, dass sich mit jedem dieser Begriffe stetige Abbildungen definieren lassen – ohne die Metrik explizit zu erwähnen.

**Satz 1.3.10.** *Seien  $(X, d)$  und  $(X', d')$  metrische Räume und  $f : X \rightarrow X'$  eine Abbildung. Dann sind äquivalent:*

1.  $f$  ist stetig.
2. Für jedes  $x \in X$  und für jede Umgebung  $V$  des Bildes  $f(x)$  ist  $f^{-1}(V)$  eine Umgebung des Urbilds  $x$ .
3. Ist  $O$  offen in  $X'$ , so ist  $f^{-1}(O)$  offen in  $X$ .
4. Ist  $A$  abgeschlossen in  $X'$ , so ist  $f^{-1}(A)$  abgeschlossen in  $X$ .

Bevor wir den Beweis unternehmen erinnern wir uns an folgende Eigenschaften von Urbildern einer Abbildung  $f : X \rightarrow X'$ :

$$\begin{aligned} f^{-1}(\emptyset) &= \emptyset \\ f^{-1}(X') &= X \\ f^{-1}(M \cup N) &= f^{-1}(M) \cup f^{-1}(N) \\ f^{-1}(M \cap N) &= f^{-1}(M) \cap f^{-1}(N) \\ f^{-1}(X' \setminus N) &= f^{-1}(X') \setminus f^{-1}(N) = X \setminus f^{-1}(N) \\ M \subseteq N &\Rightarrow f^{-1}(M) \subseteq f^{-1}(N) \end{aligned}$$

*Beweis.*

(1) $\Rightarrow$ (2) Ist  $V$  eine Umgebung von  $f(x)$ , so gibt es  $\epsilon > 0$  mit  $B_\epsilon(f(x)) \subset V$ . Da  $f$  als stetig vorausgesetzt ist, finde  $\delta > 0$  mit  $f(B_\delta(x)) \subset B_\epsilon(f(x))$ .

Nun gilt  $E \subset f^{-1}f(E)$  für alle Teilmengen  $E \subset X$ . Somit ist

$$B_\delta(x) \subset f^{-1}f(B_\delta(x)) \subset f^{-1}B_\epsilon(f(x)) \subset f^{-1}(V).$$

Somit ist das Urbild  $f^{-1}(V)$  eine Umgebung von  $x$  in  $X$ .



(2) $\Rightarrow$ (3) Sei  $O \subset X'$  offen. Wir betrachten  $x \in f^{-1}(O)$  und müssen zeigen, dass  $f^{-1}(O)$  eine offene Kugel um  $x$  enthält. Aber  $O$  ist eine Umgebung von  $f(x)$ , also ist nach Annahme  $f^{-1}(O)$  eine Umgebung von  $x$  und enthält eine offene Kugel um  $x$ .

(3) $\Rightarrow$ (1) Für beliebiges  $x \in X$  betrachten wir die offene Menge  $B_\epsilon(f(x))$ . Dann ist  $f^{-1}(B_\epsilon(f(x)))$  nach Annahme offen, also gibt es  $B_\delta(x) \subset f^{-1}(B_\epsilon(f(x)))$ . In anderen Worten, für jedes  $y$  folgt aus  $d(x, y) < \delta$  dass  $d(f(x), f(y)) < \epsilon$ .

(3) $\Leftrightarrow$ (4) Nehmen wir (3) an. Ist  $A \subset X'$  abgeschlossen, so ist  $O := X' \setminus A$  offen und deswegen

$$f^{-1}(A) = f^{-1}(X' \setminus O) = f^{-1}(X') \setminus f^{-1}(O) = X \setminus f^{-1}(O)$$

abgeschlossen.

Der Umkehrschluss folgt genauso. □

Man überzeugt sich mit ähnlichen Argumenten, dass  $f : X \rightarrow X'$  genau dann in  $x \in X$  stetig ist im Sinne von Definition 1.2.4, wenn für jede Umgebung  $V$  von  $f(x)$  die Menge  $f^{-1}(V)$  eine Umgebung von  $x$  ist.

**Definition 1.3.11.** Zwei Metriken  $d_1, d_2$  auf einer Menge  $X$  heißen **äquivalent**, wenn es für jedes  $x \in X$  und jedes  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt, so dass gilt

$$\begin{aligned} d_1(x, y) < \delta &\Rightarrow d_2(x, y) < \epsilon \\ d_2(x, y) < \delta &\Rightarrow d_1(x, y) < \epsilon . \end{aligned}$$

**Bemerkungen 1.3.12.**

1. Sind zwei Metriken  $d_1, d_2$  äquivalent, so gibt es für jede Kugel  $B_\epsilon^{d_1}(x)$  ein  $\delta > 0$ , so dass  $B_\delta^{d_2}(x) \subset B_\epsilon^{d_1}(x)$  und umgekehrt. Äquivalente Metriken ergeben also dieselben offenen und somit auch dieselben abgeschlossenen Mengen.

2. Die Metriken  $d_1$  und  $d_2$  sind genau dann äquivalent, wenn die Abbildungen

$$\text{id}_X : (X, d_1) \rightarrow (X, d_2) \quad \text{und} \quad \text{id}_X : (X, d_2) \rightarrow (X, d_1)$$

stetig sind. Sind die Metriken äquivalent dann sind alle Urbilder offener Mengen offen, so dass nach Satz 1.3.10 die Identitätsabbildung stetig ist. Umgekehrt folgt Definition 1.3.12 sofort aus der Stetigkeit von  $\text{id}_X$ .

**Beispiele 1.3.13.**

1. Die Metriken  $d_1, d_2, d_\infty$  auf  $\mathbb{R}^n$  sind äquivalent.

2. Ist  $(X, d)$  ein metrischer Raum, so ist

$$d'(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

eine äquivalente Metrik. Wegen  $d'(x, y) < 1$  ist die Metrik beschränkt. Insbesondere ist jede Metrik äquivalent zu einer beschränkten Metrik.

## 1.4 Topologische Räume

Wir untersuchen nun stetige Abbildungen in größter Allgemeinheit. Aus Satz 1.3.10 folgt, dass hierfür nicht die Metrik selbst, sondern die durch die Metrik definierten offenen Mengen bzw. Umgebungen entscheidend sind. Ein topologischer Raum definiert sich vollständig durch seine offenen Mengen. Wir orientieren uns für die folgende Definition an Satz 1.3.6:

**Definition 1.4.1.** Ein **topologischer Raum** ist eine Menge  $X$ , zusammen mit einer Familie  $\mathcal{T}$  von Teilmengen von  $X$ , für die gilt:

(O1)  $\emptyset, X \in \mathcal{T}$ .

(O2) Mit  $O_1, O_2 \in \mathcal{T}$  ist auch der Schnitt  $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}$ .

(O3) Für eine beliebige Familie  $(O_i)_{i \in I}$  von Mengen  $O_i \in \mathcal{T}$  ist auch die Vereinigung  $\cup_{i \in I} O_i \in \mathcal{T}$ .

$\mathcal{T}$  heißt dann eine **Topologie** auf  $X$  und die Elemente von  $\mathcal{T}$  heißen **offene Mengen** von  $\mathcal{T}$ .

Es reicht auch aus zu fordern, dass  $\mathcal{T}$  abgeschlossen ist unter endlichen Durchschnitten und beliebigen Vereinigungen. Denn der Durchschnitt über der leeren Indexmenge  $I = \emptyset$  ist  $X$ , da eine leere Bedingung vorliegt, und die Vereinigung über  $\emptyset$  ist  $\emptyset$ .

Wir werden im Laufe des Kurses oft nur  $X$  schreiben um  $(X, \mathcal{T})$  zu bezeichnen, falls die Topologie aus dem Zusammenhang klar ist.

### Beispiele 1.4.2.

1. Metrische Räume mit offenen Mengen wie in Definition 1.3.2 sind nach Satz 1.3.6 topologische Räume. Ein topologischer Raum, dessen Topologie von einer Metrik induziert wird, heißt **metrisierbar**.
2. Insbesondere ist jede Menge  $X \subset \mathbb{R}^n$  auf natürliche Art ein topologischer Raum. Die Topologie wird von der Beschränkung der euklidischen Metrik auf  $\mathbb{R}^n$  induziert. Wann immer wir von einem topologischen Raum  $X \subset \mathbb{R}^n$  sprechen, meinen wir diese Topologie.
3. Jede Menge  $X$  wird durch die Potenzmenge,  $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ , zu einem topologischen Raum, in dem alle Mengen offen sind. Dies ist die **diskrete Topologie** auf  $X$ . Diese Topologie wird zum Beispiel durch die diskrete Metrik aus Beispiel 1.2.2.5 definiert.
4. Die **indiskrete Topologie** oder **Klumpentopologie** oder **triviale Topologie** auf einer Menge  $X$  ist gegeben durch  $\mathcal{T} := \{\emptyset, X\}$ . Diese Topologie wird nicht von einer Metrik induziert.
5. Die **koendliche Topologie** auf einer Menge  $X$  wird durch die folgenden offenen Mengen definiert:  $O^C = O \subset X$  ist offen, wenn das Komplement  $X \setminus O$  endlich ist oder  $O = \emptyset$  gilt.

Offensichtlich sind dann nach Annahme  $\emptyset$  und wegen  $X \setminus X = \emptyset$  auch  $X$  in der Topologie. Wegen der de Morganschen Regeln

$$\begin{aligned}X \setminus (O_1 \cap O_2) &= (X \setminus O_1) \cup (X \setminus O_2) \\X \setminus \cup_{i \in I} O_i &= \cap_{i \in I} (X \setminus O_i)\end{aligned}$$

ist die Topologie unter endlichen Durchschnitten und beliebigen Vereinigungen abgeschlossen.

Wann immer Sie eine Vermutung über topologische Räume haben, sollten Sie zuerst die folgenden Fälle überprüfen: die diskrete Topologie, die indiskrete Topologie (jeweils auf einer beliebigen Menge),  $\mathbb{R}^n$  und  $[0, 1]$  (jeweils mit der Topologie, die von der euklidischen Metrik kommt).

**Definition 1.4.3.** Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum.

1. Eine Teilmenge  $A \subset X$  heißt **abgeschlossen**, wenn ihr Komplement offen ist,  $X \setminus A \in \mathcal{T}$ .
2. Eine Teilmenge  $U \subset X$  heißt **Umgebung** von  $x \in X$ , falls es eine offene Menge  $O \in \mathcal{T}$  gibt mit  $x \in O \subset U$ . Mit  $\mathcal{U}(x)$  bezeichnen wir die Menge aller Umgebungen von  $x \in X$ . Man nennt  $\mathcal{U}(x)$  auch das **Umgebungssystem** von  $x$ .

**Satz 1.4.4.** Die abgeschlossenen Mengen für eine Topologie  $(X, \mathcal{T})$  erfüllen die Eigenschaften (A1)-(A3) aus Satz 1.3.8.

Die Umgebungen für eine Topologie  $(X, \mathcal{T})$  erfüllen die Eigenschaften (U1)-(U4) aus Satz 1.3.5.

*Beweis.* Die erste Aussage folgen direkt aus der Definition und den de Morganschen Regeln.

Für die zweite Aussage gilt, dass (U1) und (U2) direkt aus den Definitionen folgen. Für (U3) verwenden wir, dass der Schnitt zweier offener Mengen offen ist. Für (U4) verfahren wir wie im Beweis von Satz 1.3.5. Sei  $U$  eine Umgebung von  $x$ . Es gibt eine offene Menge  $O$  mit  $x \in O \subset U$  und diese Menge ist Umgebung all ihrer Punkte ist.  $\square$

Um eine Topologie zu definieren, kann man auch die abgeschlossenen Mengen angeben.

**Definition 1.4.5.** Seien  $(X, \mathcal{T})$  und  $(X', \mathcal{T}')$  topologische Räume. Eine Abbildung  $f : X \rightarrow X'$  heißt **stetig**, wenn die Urbilder offener Mengen offen sind, also wenn für jedes  $O' \in \mathcal{T}'$  gilt  $f^{-1}(O') \in \mathcal{T}$ .

Eine Abbildung  $f : X \rightarrow X'$  heißt **stetig** in  $x \in X$ , wenn alle Urbilder der Umgebungen des Bildes  $f(x)$  Umgebungen von  $x$  sind, also wenn für jedes  $U \in \mathcal{U}(f(x))$  gilt  $f^{-1}(U) \in \mathcal{U}(x)$ .

**Beispiele 1.4.6.**

1. Jede stetige Abbildung zwischen metrischen Räumen induziert eine stetige Abbildung topologischer Räume. Wegen Satz 1.3.10 ist die topologische Stetigkeitsdefinition im Falle metrischer Räume äquivalent zu Definition 1.2.4.
2. Sei  $X$  eine beliebige Menge die wir als  $X^\delta := (X, \mathcal{P}(X))$  und  $X^\sigma := (X, \{\emptyset, X\})$  mit der diskreten und der indiskreten Topologie betrachten. Dann ist Die Identitätsabbildung  $X^\delta \rightarrow X^\sigma$  stetig, aber die Identitätsabbildung von  $X^\sigma \rightarrow X^\delta$  ist nicht stetig.

Allgemein ist jede Abbildung aus einem diskreten topologische Raum stetig, genauso jede Abbildung in einen Raum mit der trivialen Topologie.

Man überlegt sich leicht, dass die Identitätsabbildung  $\text{id}_{(X, \mathcal{T})}$  stetig ist und die Verkettung stetiger Abbildungen wieder stetig ist.

Man überlege sich auch, dass eine Abbildung  $f : X \rightarrow X'$  genau dann stetig ist, wenn sie in jedem Punkt  $x \in X$  stetig ist.

**Definition 1.4.7.** Seien  $(X, \mathcal{T})$  und  $(X', \mathcal{T}')$  topologische Räume. Wir schreiben  $\text{Hom}(X, X')$  für die Menge aller stetigen Abbildungen von  $X$  nach  $X'$ .

**Bemerkung 1.4.8.** Man sagt, dass topologische Räume und stetige Abbildungen eine *Kategorie* formen.

Eine Kategorie  $\mathcal{C}$  besteht aus den folgenden Daten: Eine Klasse von Objekten  $\text{Ob}(\mathcal{C})$ , und für jedes Paar von Objekten  $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  eine Klasse von Morphismen  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  mit einer assoziativen Verknüpfung  $\circ : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$  und Identitätsmorphisme  $\text{id}_X \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$  für jedes Objekt. Wir werden uns diesem Begriff später im Detail zuwenden.

## 1.5 Vergleich von Topologien

**Definition 1.5.1.** Seien  $\mathcal{T}_1$  und  $\mathcal{T}_2$  Topologien auf der gleichen Menge  $X$ . Die Topologie  $\mathcal{T}_1$  heißt **feiner** als  $\mathcal{T}_2$  (und  $\mathcal{T}_2$  **gröber** als  $\mathcal{T}_1$ ), wenn  $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$  gilt.

Also ist jede offene Menge  $O \in \mathcal{T}_2$  der gröberen Topologie auch offen in der feineren Topologie  $\mathcal{T}_1$ , also  $O \in \mathcal{T}_1$ .

**Bemerkungen 1.5.2.**

1.  $\mathcal{T}_1$  ist feiner als  $\mathcal{T}_2$  genau dann, wenn die Identität als Abbildung der topologischen Räume

$$(X, \mathcal{T}_1) \xrightarrow{\text{id}_X} (X, \mathcal{T}_2)$$

stetig ist.

2. Abbildungen aus der feineren Topologie  $(X, \mathcal{T}_1)$  heraus haben es einfacher, stetig zu sein, denn es gibt im Urbild mehr offene Mengen. Abbildungen in die gröbere Topologie  $(X, \mathcal{T}_2)$  hinein haben es einfacher, stetig zu sein, denn es muss für weniger offene Mengen das Urbild offen sein.
3. Die indiskrete Topologie  $(X, \{\emptyset, X\})$  ist die gröbste Topologie auf einer Menge  $X$ ; die diskrete Topologie  $(X, \mathcal{P}(X))$  ist die feinste Topologie auf einer Menge.

Aus der Algebra kennen Sie Isomorphismen zwischen Gruppen oder Vektorräumen, wenn zwei Objekte sich nur durch die Namen der Elemente unterscheiden, und als äquivalent betrachtet werden können. Wir wenden uns nun der entsprechenden Relation von topologischen Räumen zu.

**Definition 1.5.3.** Eine bijektive Abbildung  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$  zwischen topologischen Räumen heißt **Homöomorphismus**, wenn  $f$  und  $f^{-1}$  stetig sind. Die topologischen Räume heißen dann **homöomorph**, in Zeichen  $(X, \mathcal{T}) \cong (X', \mathcal{T}')$ .

**Bemerkung 1.5.4.** Ist  $f$  ein Homöomorphismus, so induziert  $f$  durch

$$\mathcal{T}_1 \ni O \mapsto f(O) \in \mathcal{T}_2$$

eine Bijektion zwischen  $\mathcal{T}_1$  und  $\mathcal{T}_2$ .

**Beispiele 1.5.5.**

1. Die abgeschlossene Einheitskreisscheibe

$$\overline{B_1(0)} = \mathbb{D}^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\}$$

ist homöomorph zum Quadrat  $I^2 = [0, 1] \times [0, 1]$ .

2. Die Abbildung

$$\begin{aligned} f : [0, 1) &\rightarrow \mathbb{S}^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\} \\ t &\mapsto e^{2\pi it} \end{aligned}$$

ist zwar stetig und bijektiv, hat aber kein stetiges Inverses. Das halboffene Intervall  $[0, \frac{1}{2})$  ist offen in  $[0, 1)$ , aber die Teilmenge  $(f^{-1})^{-1}([0, \frac{1}{2})) = f([0, \frac{1}{2}))$  ist nicht offen in  $\mathbb{S}^1$  da sie keine offene Kugel um  $f(0)$  enthält.

3. Die Abbildung

$$\begin{aligned} f : (-1, 1) &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x}{1-|x|} \end{aligned}$$

mit Inversem  $f^{-1}(y) = \frac{y}{1+|y|}$  ist ein Homöomorphismus. Man sieht leicht, dass jedes offene Intervall in  $\mathbb{R}$  homöomorph zu  $\mathbb{R}$  ist.

4. Sei  $\mathbb{S}^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$  und  $N = (0, 0, 1)$ . Dann ist die stereographische Projektion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} &\rightarrow \mathbb{C} \\ (x_1, x_2, x_3) &\mapsto \frac{x_1}{1-x_3} + i \frac{x_2}{1-x_3} \end{aligned}$$

mit Inversem

$$f^{-1} : z \mapsto \left( \frac{2\operatorname{Re}(z)}{1+|z|^2}, \frac{2\operatorname{Im}(z)}{1+|z|^2}, \frac{|z|^2-1}{1+|z|^2} \right)$$

ein Homöomorphismus. Es ist mit den Methoden der Analysis leicht zu sehen, dass  $f$  und  $f^{-1}$  stetig sind.

5. Sind zwei Metriken  $d$  und  $d'$  äquivalent dann ist die Identitätsabbildung  $\operatorname{id}_X : (X, d) \rightarrow (X, d')$  ein Homöomorphismus.

Um zu zeigen, dass zwei topologische Räume homöomorph sind genügt es, einen Homöomorphismus anzugeben. Es ist im Allgemeinen deutlich schwieriger, zu zeigen, dass zwei topologische Räume nicht homöomorph sind. In Beispiel 1.5.5.2 haben wir gesehen, dass eine bestimmte Funktion keinen Homöomorphismus darstellt. Aber das zeigt noch nicht, dass es nicht irgendeinen anderen Homöomorphismus gibt.

**Satz 1.5.6.** *Homöomorphismen definieren eine Äquivalenzrelation auf topologischen Räumen.*

*Beweis.* Die Bedingungen einer Äquivalenzrelation lassen sich leicht überprüfen.  $\square$

**Definition 1.5.7.** Eine Abbildung zwischen topologischen Räumen heißt **offen**, falls das Bild offener Mengen offen ist.

Eine Abbildung zwischen topologischen Räumen heißt **abgeschlossen**, falls das Bild abgeschlossener Mengen abgeschlossen ist.

**Satz 1.5.8.** *Eine bijektive Abbildung*

$$f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$$

*ist genau dann ein Homöomorphismus, wenn  $f$  stetig und offen ist (und genau dann, wenn  $f$  stetig und abgeschlossen ist).*

*Beweis.* Direkt aus der Definition.  $\square$

## 1.6 Unterräume

**Definition 1.6.1.** Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum und  $Y \subset X$  eine Teilmenge. Die **Unterraumtopologie**  $\mathcal{T}_{X|Y}$  ist definiert durch

$$\mathcal{T}_{X|Y} := \{O \cap Y \mid O \in \mathcal{T}\} .$$

Man rechnet leicht nach, dass die Axiome einer Topologie erfüllt sind. Eine Teilmenge  $B \subset Y$  ist also genau dann offen in  $Y$ , wenn es eine offene Menge  $O \subset X$  gibt mit  $B = Y \cap O$ . Eine Teilmenge  $A \subset Y$  ist genau dann abgeschlossen in  $Y$ , wenn  $A = Y \cap C$  für eine abgeschlossene Teilmenge  $C \subset X$  gilt.

Zum Beispiel definiert die Unterraumtopologie auf  $[0, 1) \subset \mathbb{R}$  alle Teilmengen  $A$  als offen, die Schnitte von  $[0, 1)$  mit offenen Mengen in  $\mathbb{R}$  sind. Das sind offene Intervalle sowie die halboffenen Intervalle  $[0, a)$  mit  $a \leq 1$ .

**Satz 1.6.2.** *Die Inklusion  $\iota : (Y, \mathcal{T}_{X|Y}) \rightarrow (X, \mathcal{T})$  ist stetig und  $\mathcal{T}_{X|Y}$  ist die größte Topologie auf  $Y$  sodass  $\iota$  stetig ist.*

*Überdies gilt die folgende universelle Eigenschaft: Sei  $(Z, \mathcal{S})$  ein beliebiger topologischer Raum. Eine Abbildung  $f : (Z, \mathcal{S}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_{X|Y})$  ist genau dann stetig, wenn die Abbildung  $\iota \circ f : (Z, \mathcal{S}) \rightarrow (X, \mathcal{T})$  stetig ist.*

*Beweis.* Die erste Aussage folgt wegen  $\iota^{-1}(O) = Y \cap O$  nach Definition von  $\mathcal{T}_{X|Y}$ . Wenn  $\iota$  stetig ist, müssen jedenfalls alle  $O \cap Y$  offen sein, also ist die Unterraumtopologie größtmöglich.

Für die universelle Eigenschaft bemerken wir zuerst dass, wenn  $f$  stetig ist, auch die Verkettung stetiger Abbildungen  $\iota \circ f$  stetig ist.

Sei umgekehrt  $\iota \circ f$  stetig und  $B \subset Y$  offen, also  $B = Y \cap O$  mit  $O \in \mathcal{T}$ . Dann ist

$$\begin{aligned} f^{-1}(B) &= f^{-1}(Y \cap O) \\ &= f^{-1}(\iota^{-1}(O)) \\ &= (\iota \circ f)^{-1}(O) \end{aligned}$$

offen, weil die Komposition  $\iota \circ f$  nach Voraussetzung stetig ist.  $\square$

**Satz 1.6.3.** Die Unterraumtopologie auf  $Y \subset X$  ist durch die universelle Eigenschaft in Satz 1.6.2 eindeutig bestimmt. Sei also  $\mathcal{T}'$  eine andere Topologie auf  $Y$  mit der Eigenschaft, dass für jeden topologischen Raum  $f : (Z, \mathcal{S})$  eine Abbildung  $(Z, \mathcal{S}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$  genau dann stetig ist, wenn  $\iota \circ f$  stetig ist. Dann ist  $\text{id}_Y : (Y, \mathcal{T}_{X|Y}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$  ein Homöomorphismus.

*Beweis.* Nach der universellen Eigenschaft für  $\mathcal{T}'$  ist  $\iota' : (Y, \mathcal{T}') \rightarrow (X, \mathcal{T})$  stetig. Nach der universellen Eigenschaft für  $\mathcal{T}_{X|Y}$  ist dann  $\text{id}_Y : (Y, \mathcal{T}') \rightarrow (Y, \mathcal{T}_{X|Y})$  stetig da  $\iota' \circ \text{id}_Y$  stetig ist.

Andererseits ist  $\iota : (Y, \mathcal{T}_{X|Y}) \rightarrow (X, \mathcal{T})$  stetig. Nach der universellen Eigenschaft für  $\mathcal{T}'$  ist dann  $\text{id}'_Y : (Y, \mathcal{T}_{X|Y}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$  stetig.

Damit definieren  $\text{id}_Y$  und  $\text{id}'_Y$  einen Homöomorphismus.  $\square$

#### Bemerkungen 1.6.4.

1. Gilt  $X \supset Y \supset Z$ , so ist

$$\mathcal{T}_{X|Z} = \mathcal{T}_{(X|Y)|Z}.$$

Denn  $O' \in \mathcal{T}_{X|Z}$  ist von der Form  $O' = Z \cap O$  mit  $O$  offen in  $X$  und somit  $O' = (O \cap Y) \cap Z \in \mathcal{T}_{(X|Y)|Z}$ .

Ist umgekehrt  $O' \in \mathcal{T}_{(X|Y)|Z}$ , so finde  $O'' \in \mathcal{T}_{X|Y}$  mit  $O' = O'' \cap Z$ . Es gibt dann  $O \in \mathcal{T}$  mit  $O'' = O \cap Y$  und somit gilt  $O' = (O \cap Y) \cap Z = O \cap Z \in \mathcal{T}_{X|Z}$ .

2. Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $Y \subset X$ . Dann ist  $Y$  ein metrischer Raum mit der induzierten Metrik und erhält so eine Topologie. Andererseits induziert  $d$  auf  $X$  eine Topologie und wir können  $Y$  mit der Unterraumtopologie versehen. Es folgt leicht aus den Definitionen, dass diese Topologien übereinstimmen.

**Definition 1.6.5.** Eine Abbildung  $f : X' \rightarrow X$  heißt **Einbettung**, falls  $\tilde{f} : X' \rightarrow f(X')$  ein Homöomorphismus auf das Bild  $f(X')$  mit der Unterraumtopologie ist.

#### Beispiele 1.6.6.

1. Die Abbildung

$$\begin{aligned} [0, 1) &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \exp(2\pi it) \end{aligned}$$

ist zwar injektiv, aber keine Einbettung, da die Umkehrabbildung nicht stetig ist, vgl. Beispiel 1.5.5.2.

2. Für jede stetige Abbildung  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist ihr Graph

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ t &\mapsto (t, \varphi(t)) \end{aligned}$$

eine Einbettung. Denn die Umkehrabbildung, die Projektion auf den ersten Faktor, ist stetig.

3. Vorsicht: Ist  $f : X \rightarrow X'$  stetig und  $Y \subset X$ , so ist nach Satz 1.6.2.2  $f|_Y = f \circ \iota$  stetig, wobei  $Y$  mit der Unterraumtopologie versehen ist. Aber man kann nicht umgekehrt aus der Stetigkeit einer Einschränkung  $f|_Y$  auf die Stetigkeit von  $f$  schließen.

Als einfaches Gegenbeispiel betrachte man

$$f : \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Die Einschränkung  $f|_{\mathbb{Q}}$  ist als konstante Funktion stetig,  $f$  selbst aber nirgendwo stetig.

4. Einbettungen von  $S^1 := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$  in den  $\mathbb{R}^3$  heißen **Knoten**. Als Beispiel betrachten wir den Kleeblattknoten und den Unknoten.

## 1.7 Abgeschlossene Hülle und offener Kern

**Definition 1.7.1.** Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum und sei  $B \subset X$  eine Teilmenge. Dann nennen wir

$$\bar{B} := \bigcap_{C \supset B, C \text{ abg.}} C$$

die **abgeschlossene Hülle** oder den **Abschluss** von  $B$ .

Wir nennen

$$\overset{\circ}{B} := \bigcup_{O \subset B, O \text{ offen}} O$$

den **offenen Kern** oder das **Innere** von  $B$ .

Die Idee ist, dass der Abschluss von  $B$  die kleinste abgeschlossene Menge ist, die  $B$  enthält. Das ist ein weiteres Beispiel einer *universellen Eigenschaft*. Man beachte, dass es im Allgemeinen keinen Sinn ergibt, von der kleinsten offenen Menge zu sprechen, die  $B$  enthält.

**Beispiel 1.7.2.** Sei  $A$  eines der Intervalle  $(a, b)$ ,  $[a, b]$  oder  $[a, b)$ . Dann gilt  $\bar{A} = [a, b]$  und  $\overset{\circ}{A} = (a, b)$ .

**Satz 1.7.3.** Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum.

1. Die abgeschlossene Hülle einer Teilmenge  $B \subset X$  ist abgeschlossen. Es gilt  $B \subset \bar{B}$ . Für jede abgeschlossene Menge  $C$  mit  $B \subset C$  gilt auch  $\bar{B} \subset C$ . Insbesondere ist  $B = \bar{B}$  wenn  $B$  abgeschlossen ist.
2. Der offene Kern  $\overset{\circ}{B}$  einer Teilmenge  $B \subset X$  ist offen. Es gilt  $\overset{\circ}{B} \subset B$ . Für jede offene Menge  $O$  mit  $O \subset B$  gilt auch  $O \subset \overset{\circ}{B}$ . Insbesondere ist  $B = \overset{\circ}{B}$  wenn  $B$  offen ist.
3. Es gilt  $\bar{B} = (\overset{\circ}{B^c})^c$  und  $\overset{\circ}{B} = \overline{B^c}^c$ . (Hier bezeichnet  $-^c$  das Komplement in  $X$ .)



*Beweis.* Dieser Beweis besteht im Wesentlichen aus der Übersetzung von Definitionen.

Als Schnitt abgeschlossener Mengen, die  $B$  enthalten, ist  $\overline{B}$  nach Satz 1.4.4 abgeschlossen und enthält  $B$ . Per Definition ist  $\overline{B}$  in jeder abgeschlossenen Menge enthalten, die  $B$  enthält. Ist  $B$  also abgeschlossen gilt  $\overline{B} \subset B$  und damit  $\overline{B} = B$ .

Der Beweis von 2. folgt dual.

Für 3. bemerken wir dass  $B \subset D$  genau dann gilt wenn  $D^C \subset B^C$  und  $D$  abgeschlossen ist genau wenn  $U = D^C$  offen ist. Nach den De Morganschen Regeln gilt also  $\overline{B^C} = \cup_{B \subset D} D^C = \cup_{U \subset B^C} U = \overset{\circ}{B^C}$ . Wobei die erste Vereinigung über alle abgeschlossenen Obermengen und die zweite über alle offenen Teilmengen geht. Die zweite Aussage folgt dual.  $\square$

Wir wollen nun Abschluss und inneren Kern konkreter beschreiben.

**Definition 1.7.4.** Ein Punkt  $x \in X$  heißt **Berührungspunkt** einer Teilmenge  $B \subset X$ , falls  $B$  jedes Umgebung von  $x$  schneidet, also falls für alle  $U \in \mathcal{U}(x)$  gilt  $U \cap B \neq \emptyset$ .

Ein Punkt  $x \in X$  heißt **innerer Punkt** einer Teilmenge  $B \subset X$ , falls  $B$  eine Umgebung von  $x$  enthält, also falls es  $U \in \mathcal{U}(x)$  gibt mit  $x \in U \subset B$ .

**Satz 1.7.5.** Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum mit Teilmenge  $A$ . Dann ist die abgeschlossene Hülle  $\overline{A}$  die Menge der Berührungspunkte von  $A$ . Der offene Kern  $\overset{\circ}{A}$  ist die Menge der inneren Punkte von  $A$ .

*Beweis.* Wir zeigen nur die Aussage über die abgeschlossene Hülle, die Aussage über den inneren Kern folgt dual.

Sei  $x \in X$  kein Berührungspunkt von  $A$ . Dann existiert eine Umgebung  $U \in \mathcal{U}(x)$  mit  $U \cap A = \emptyset$ . Also ist  $A \subset X \setminus U$ . Da  $U$  eine Umgebung von  $x$  ist, finde eine offene Teilmenge  $O \subset U$ , die  $x$  enthält. Dann ist  $X \setminus U \subset X \setminus O$ . Es ist  $X \setminus O$  abgeschlossen mit  $A \subset X \setminus O$  und somit  $\overline{A} \subset X \setminus O$ . Damit ist aber  $x \notin \overline{A}$ .

Sei umgekehrt  $x \notin \overline{A}$ . Dann existiert eine abgeschlossene Obermenge  $A \subset C$  mit  $x \notin C$ . Die offene Menge  $V := X \setminus C$  in  $X$  enthält  $x$ , ist also Umgebung von  $x$ . Sie ist aber zu  $A$  disjunkt,  $A \cap V = \emptyset$ . Also ist  $x$  kein Berührungspunkt der Menge  $A$ .  $\square$

**Definition 1.7.6.** Sei  $B \subset X$  eine Teilmenge. Dann nennen wir

$$\partial B := \{x \in X \mid \text{für alle } U \in \mathcal{U}(x) \text{ gilt } U \cap B \neq \emptyset \neq U \cap (X \setminus B)\} = \overline{B} \setminus \overset{\circ}{B}$$

den **Rand** von  $B$ . Es gilt  $\partial B = \overline{B} \cap \overline{X \setminus B}$ , jede Umgebung eines Randpunkts von  $B$  enthält also Punkte von  $B$  und des Komplements von  $B$ .

**Bemerkungen 1.7.7.**

1. Seien  $A, B$  Teilmengen eines topologischen Raums  $X$ . Aus  $A \subset B$  folgen dann  $\overline{A} \subset \overline{B}$  und  $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$ .

2. Es gilt

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad \text{und} \quad A \overset{\circ}{\cap} B = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} .$$

Denn es ist  $A \cup B \subset \overline{A \cup B}$ . Daraus folgt, dass  $\overline{A \cup B} \subset \overline{\overline{A \cup B}} = \overline{A \cup B}$  gilt, weil  $\overline{A \cup B}$  als endliche Vereinigung abgeschlossener Mengen abgeschlossen ist.

Umgekehrt folgt aus  $A \subset A \cup B$  und  $B \subset A \cup B$ , dass  $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$  und  $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$  und somit die umgekehrte Inklusion  $\overline{A \cup B} \subset \overline{A \cup B}$ .

Der Beweis der Identität  $A \overset{\circ}{\cap} B = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$  ist dual: Aus  $A \cap B \subset A$  und  $A \cap B \subset B$  folgt  $A \overset{\circ}{\cap} B \subset \overset{\circ}{A}$  und  $A \overset{\circ}{\cap} B \subset \overset{\circ}{B}$ . Daher gilt  $A \overset{\circ}{\cap} B \subset \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ . Umgekehrt gilt  $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \subset A \cap B$ . Daraus folgt  $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \subset A \overset{\circ}{\cap} B$ , weil  $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$  als endlicher Schnitt offener Mengen offen ist und somit gleich seinem Inneren ist.

**Definition 1.7.8.** Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum.

1. Wir sagen, eine Teilmenge  $A \subset X$  liegt **dicht** in  $X$ , wenn der Abschluss von  $A$  gleich  $X$  ist,  $\overline{A} = X$ .
2. Wir sagen, eine Teilmenge  $A \subset X$  liegt **nirgends dicht**, wenn  $\overset{\circ}{\overline{A}} = \emptyset$  gilt.

**Beispiel 1.7.9.** Wir betrachten  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ : es ist  $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ , also liegt  $\mathbb{Q}$  dicht in  $\mathbb{R}$ .

Die Teilmenge  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$  ist nirgends dicht, denn  $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$  und  $\overset{\circ}{\mathbb{Z}} = \emptyset$ . Auch  $A = \{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  ist in  $\mathbb{R}$  nirgends dicht. Denn  $\overline{A} = A \cup \{0\}$  und  $\overset{\circ}{A} = \emptyset$ .

**Definition 1.7.10.** Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum. Eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $x_n \in X$  **konvergiert** gegen  $x \in X$ , in Zeichen  $x_n \rightarrow x$ , wenn es zu jeder Umgebung  $U$  von  $x$  ein  $N \in \mathbb{N}$  gibt, so dass  $x_n \in U$  für alle  $n \geq N$ .

Definieren wir auf  $X$  zwei Topologien, dann gibt es weniger konvergente Folgen in der feineren Topologie als in der gröberen Topologie, denn es muss für mehr offene Mengen getestet werden, ob dort fast alle Folgenglieder liegen.

**Beispiel 1.7.11.** Betrachte die indiskrete Topologie  $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$  aus Beispiel 1.4.3. Dann konvergiert jede Folge gegen jedes Element von  $X$ . Für eine Menge  $X$  mit zwei oder mehr Elementen hat eine Folge also mehr als einen Grenzwert.

Beispiele zeigen, dass der Grenzwert einer Folge in einem allgemeinen topologischen Raum nicht eindeutig sein muss. Konvergente Folgen sind also im Allgemeinen deutlich weniger nützlich sind als in  $\mathbb{R}^n$  (oder anderen metrischen Räumen). Man könnte zum Beispiel vermuten, dass Berührungspunkte von  $A$  die Grenzwerte von Folgen in  $A$  sind. Das ist nicht immer korrekt.

## 1.8 Basen, Subbasen, Umgebungsbasen

Wir führen nun Begriffe ein, die es uns erlauben, Topologien explizit anzugeben.

**Definition 1.8.1.** Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum.

1. Eine Familie  $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$  heißt **Basis** der Topologie  $\mathcal{T}$ , wenn jedes  $O \in \mathcal{T}$  eine Vereinigung beliebig vieler  $B_i \in \mathcal{B}$  ist.
2. Eine Familie  $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$  heißt **Subbasis** von  $\mathcal{T}$ , falls jedes  $O \in \mathcal{T}$  eine beliebige Vereinigung endlicher Durchschnitte von Elementen  $S \in \mathcal{S}$  ist.

Wir erinnern uns hier, dass die leere Vereinigung die leere Menge ist und der leere Durchschnitt die gesamte Menge  $X$  ist.

### Beispiele 1.8.2.

1. Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Dann ist die Menge  $\mathcal{B} := \{B_\epsilon(x) \mid \epsilon > 0, x \in X\}$  der offenen Kugeln eine Basis der Topologie. Denn sei  $O \subset X$  offen. Finde für jedes  $x \in O$  eine offene Kugel  $B_{\epsilon(x)}(x) \subset O$  und schreibe  $O = \cup_{x \in O} B_{\epsilon(x)}(x)$ .

Schon die offenen Kugeln  $B_{1/n}(x)$  mit  $n \in \mathbb{N}$  und  $x \in X$  bilden eine Basis.

2. Die kofinale oder koendliche Topologie aus Beispiel 1.4.2.5 hat eine Subbasis  $\mathcal{B} := \{X \setminus \{x\} \mid x \in X\}$ .
3. Eine Topologie  $\mathcal{T}$  ist stets Basis für sich selbst.

**Satz 1.8.3.** *Jedes System von Teilmengen  $\mathcal{S}$  von  $X$  ist Subbasis einer Topologie  $\mathcal{T} = \langle \mathcal{S} \rangle$ .  $\mathcal{T}$  ist die größte Topologie die alle Elemente von  $\mathcal{S}$  enthält, d.h. jede Topologie, die alle Elemente von  $\mathcal{S}$  enthält ist feiner als  $\mathcal{T}$ .*

*Beweis.* Wir definieren  $\mathcal{T}$  als die Menge aller beliebigen Vereinigungen endlicher Durchschnitte von Teilmengen in  $\mathcal{S}$ . Dann sind die Axiome für eine Topologie erfüllt.  $X$  ist der leere Schnitt und  $\emptyset$  die leere Vereinigung.  $\mathcal{T}$  ist per Definition unter beliebigen Vereinigungen abgeschlossen. Man beachte nun, dass ein Schnitt von Vereinigungen von Schnitten selbst wieder eine Vereinigung von Schnitten ist, also ist  $\mathcal{T}$  auch unter endlichen Schnitten abgeschlossen.

Eine Basis dieser Topologie ist durch endliche Schnitte von Elementen aus  $\mathcal{S}$  gegeben,

$$\mathcal{B} := \{S_{i_1} \cap \dots \cap S_{i_n} \mid n \in \mathbb{N} \text{ und } S_{i_k} \in \mathcal{S}\}$$

und die Topologie ist

$$\mathcal{T} := \{\cup_i B_i \mid B_i \in \mathcal{B}\}.$$

Sei  $\mathcal{T}'$  eine Topologie, die alle Mengen aus  $\mathcal{S}$  enthält. Dann enthält  $\mathcal{T}'$  auch alle Vereinigungen endlicher Schnitte von Elementen von  $\mathcal{S}$  und damit  $\mathcal{T}$ .  $\square$

### Bemerkungen 1.8.4.

1. Nicht jedes System  $\mathcal{B}$  von Teilmengen von  $X$  ist Basis einer Topologie. Ein System von Teilmengen ist genau dann Basis einer Topologie wenn,  $\cup_{B \in \mathcal{B}} B = X$  gilt und wenn es für jedes  $x \in U \cap V$  mit  $U, V \in \mathcal{B}$  ein  $W \in \mathcal{B}$  gibt, so dass  $x \in W \subset U \cap V$  gilt.

2. Jede Basis ist auch eine Subbasis, aber nicht jede Subbasis ist eine Basis.

(Sub-)Basen ersparen Arbeit:

**Satz 1.8.5.** *Seien  $(X, \mathcal{T})$  und  $(X', \mathcal{T}')$  topologische Räume. Die folgenden Aussagen für eine Abbildung  $f : X \rightarrow X'$  sind äquivalent:*

1.  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$  ist stetig.
2. Für jede Basis  $\mathcal{B}'$  von  $\mathcal{T}'$  gilt: Für jedes  $B' \in \mathcal{B}'$  ist  $f^{-1}(B')$  offen, also  $f^{-1}(B') \in \mathcal{T}$ .

3. Es gibt eine Basis  $\mathcal{B}'$  von  $\mathcal{T}'$ , für die gilt: Für jedes  $B' \in \mathcal{B}'$  ist  $f^{-1}(B')$  offen.
4. Für jede Subbasis  $\mathcal{S}'$  von  $\mathcal{T}'$  gilt: Für jedes  $S' \in \mathcal{S}'$  ist  $f^{-1}(S')$  offen.
5. Es gibt eine Subbasis  $\mathcal{S}'$  von  $\mathcal{T}'$ , für die gilt: Für jedes  $S' \in \mathcal{S}'$  ist  $f^{-1}(S')$  offen.

*Beweis.* Es gilt (1)  $\Rightarrow$  (2), (3), (4) und (5) da alle Elemente einer Basis oder Subbasis offen sind. Wir brauchen nur (1)  $\Rightarrow$  (4).

Die Implikation (4)  $\Rightarrow$  (5) folgt unmittelbar, wir können zum Beispiel  $\mathcal{T}'$  als Subbasis für  $\mathcal{T}'$  verstehen. Genauso (2)  $\Rightarrow$  (3).

Für (5)  $\Rightarrow$  (1) sei  $\mathcal{B}'$  eine Basis wie in 3. Schreibe eine beliebige offene Menge  $U \subset X'$  als Vereinigung von endlichen Schnitten von Elementen von  $\mathcal{S}'$ . Dann ist  $f^{-1}(U)$  Vereinigung der endlichen Schnitte der offenen Urbilder, und damit nach Definition selbst offen. Damit sind (1), (4) und (5) äquivalent.

Da jede Basis auch eine Subbasis ist, folgen (4)  $\Rightarrow$  (2) und (3)  $\Rightarrow$  (5). Zusammen mit (2)  $\Rightarrow$  (3) zeigt das die Äquivalenz aller fünf Bedingungen.  $\square$

**Definition 1.8.6.** Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum und  $x \in X$ . Eine Teilmenge  $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{U}(x)$  der Mengen aller Umgebungen von  $x$  heißt **Umgebungsbasis** von  $x$ , falls in jeder Umgebung  $U \in \mathcal{U}(x)$  ein  $B \in \mathcal{B}(x)$  liegt mit  $x \in B \subset U$ .

Insbesondere sind die Elemente einer Umgebungsbasis  $\mathcal{B}(x)$  Umgebungen von  $x$ .

**Beispiel 1.8.7.** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $x \in X$ . Dann bilden die offenen Kugeln  $(B_{1/n}(x))_{n \in \mathbb{N}}$  eine Umgebungsbasis von  $x$ .

**Beispiel 1.8.8.** Für jeden topologischen Raum  $(X, \mathcal{T})$  mit Basis  $\mathcal{B}$  und jeden Punkt  $x \in X$  ist das System von Teilmengen  $\mathcal{B}(x) := \{B \in \mathcal{B} \mid x \in B\}$  eine Umgebungsbasis von  $x$ . Sei  $U \ni x$  eine Umgebung; finde eine offene Menge  $x \in O \subset U$ , die als Vereinigung von Mengen in der Basis  $\mathcal{B}$  geschrieben werden kann,  $O = \cup_{i \in I} O_i$ . Wenigstens eine offene Menge  $O_i$  enthält  $x$ , also  $O_i \in \mathcal{B}(x)$  und es ist  $O_i \subset U$ .

**Satz 1.8.9.** Seien  $(X, \mathcal{T})$  und  $(X', \mathcal{T}')$  topologische Räume. Eine Abbildung  $f : X \rightarrow X'$  ist genau dann stetig in  $x \in X$ , wenn  $f^{-1}(U) \in \mathcal{U}(x)$  für alle  $U \in \mathcal{B}(f(x))$ , wobei  $\mathcal{B}(f(x))$  eine Umgebungsbasis des Bildes  $f(x)$  ist.

*Beweis.* Ist  $f$  in  $x \in X$  stetig, so sind nach Definition die Urbilder von Umgebungen des Bildes  $f(x)$  Umgebungen von  $x$ , also insbesondere die Urbilder der Mengen in der Umgebungsbasis  $\mathcal{B}(f(x))$ .

Umgekehrt sei  $U$  eine beliebige Umgebung von  $f(x)$ .  $U$  enthält eine Umgebung  $B \in \mathcal{B}(f(x))$ . Wir haben  $f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(U)$  und  $f^{-1}(B)$  ist nach Voraussetzung eine Umgebung von  $x$ . Deswegen ist auch  $f^{-1}(U)$  eine Umgebung von  $x$ .  $\square$

## 1.9 Abzählbarkeit

Wir diskutieren nun Abzählbarkeitseigenschaften:

**Definition 1.9.1.** Ein topologischer Raum  $(X, \mathcal{T})$  erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom (AZ1), wenn jeder Punkt von  $X$  eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt.

$X$  erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom (AZ2), wenn die Topologie  $\mathcal{T}$  eine abzählbare Basis besitzt.

**Bemerkung 1.9.2.** (AZ2) impliziert offensichtlich (AZ1): ist  $\mathcal{B}$  eine abzählbare Basis, so ist auch die Umgebungsbasis  $\mathcal{B}(x)$  aus Beispiel 1.8.8 abzählbar.

### Beispiele 1.9.3.

1. Für jeden metrischen Raum  $(X, d)$  gilt die Abzählbarkeitseigenschaft (AZ1): betrachte für gegebenes  $x \in X$  die offenen Kugeln  $B_{1/n}(x)$  mit  $n \in \mathbb{N}$ , vgl. Beispiel 1.8.7.
2. Der  $\mathbb{R}^n$  mit der euklidischen Topologie erfüllt (AZ2): betrachte  $B_{1/n}(x)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und alle  $x \in \mathbb{Q}^n$ .
3. Sei  $X$  eine überabzählbare Menge mit diskreter Topologie aus Beispiel 1.4.2.3. Dann gilt (AZ1), denn für jeden Punkt  $x \in X$  ist  $\{x\} \in \mathcal{U}(x)$  eine einelementige Umgebungsbasis. Aber (AZ2) gilt nicht, denn eine Basis muss  $\{x\}$  für jeden Punkt  $x$  enthalten.

Der folgende Satz ist insbesondere wichtig für metrische Räume, wir beweisen ihn aber in größerer Allgemeinheit.

**Satz 1.9.4.** *Ein topologischer Raum  $(X, \mathcal{T})$  erfülle die Abzählbarkeitseigenschaft (AZ1). Dann gilt:*

1.  $x \in \overline{A}$  genau dann, wenn es eine Folge  $(a_n)$  in  $A$  gibt mit  $a_n \rightarrow x$ .
2. Sei  $(X', \mathcal{T}')$  ein beliebiger weiterer topologischer Raum (der nicht unbedingt (AZ1) erfüllen muss). Dann ist eine Abbildung  $f : X \rightarrow X'$  stetig in  $x \in X$  genau dann, wenn aus  $x_n \rightarrow x$  folgt  $f(x_n) \rightarrow f(x)$ .

Gilt also die Abzählbarkeitsbedingung (AZ1) im Urbild, so reduziert sich Stetigkeit auf Folgenstetigkeit.

*Beweis.* Wir beweisen 1. Es gebe eine Folge  $a_n \rightarrow a$  mit  $a_n \in A$ . Dann liegen in jeder Umgebung  $U$  von  $a$  fast alle Folgenglieder, und diese sind Elemente von  $A$ . Also ist  $U \cap A \neq \emptyset$  für jede Umgebung  $U$  von  $a$ . Also ist  $a$  ein Berührungspunkt von  $A$ ; nach Satz 1.7.5 gilt  $a \in \overline{A}$ . In diese Richtung geht die Abzählbarkeitseigenschaft (AZ1) nicht ein.

Sei umgekehrt  $a \in \overline{A}$ . Wähle wegen (AZ1) eine abzählbare Umgebungsbasis  $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$  von  $x$ . Nun setze  $V_1 := U_1$ ,  $V_2 := U_1 \cap U_2$  und induktiv  $V_n := V_{n-1} \cap U_n$ , so dass wir eine Umgebungsbasis von  $x$  bekommen, mit  $V_n \subset V_{n-1}$ . In jedem  $V_n \cap A$  liegt, da  $a \in \overline{A}$  nach Satz 1.7.5 Berührungspunkt von  $A$  ist, mindestens ein Punkt; wir wählen einen solchen,  $a_n \in V_n \cap A$ .

Diese Folge konvergiert gegen  $a$ : denn sei  $W$  eine beliebige Umgebung von  $x$ , dann gibt es  $N \in \mathbb{N}$  mit  $U_N \subset W$  und somit  $V_N \subset W$  und sogar  $V_n \subset V_N \subset W$  für alle  $n \geq N$ . Insbesondere ist  $a_k \in W$  für alle  $k \geq N$ .

Wenden wir uns nun 2. zu. Sei  $f : X \rightarrow X'$  stetig in  $x \in X$  im Sinne von Definition 1.4.5; dann folgt die Folgenstetigkeit wie aus der Analysis bekannt: sei  $x_n \rightarrow x$  und  $U$  eine Umgebung von  $f(x)$ . Dann ist  $f^{-1}(U) \subset X$  eine Umgebung von  $x$  und enthält fast alle Folgenglieder von  $(x_n)$ . Damit liegen aber auch fast alle Folgenglieder der Folge  $(f(x_n))$  in  $U$ . Auch hier geht die Abzählbarkeitseigenschaft (AZ1) nicht ein.

Umgekehrt nehmen wir an, dass die Funktion  $f$  nicht stetig in  $x$  ist. Das bedeutet, dass eine Umgebung  $U$  von  $f(x)$  existiert, für die  $f^{-1}(U)$  keine Umgebung von  $x$  ist.

Sei  $\mathcal{B} = (B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine abzählbare Umgebungsbasis des Punktes  $x$ . Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  ist der endliche Schnitt  $C_n = \bigcap_{k=0}^n B_k$  eine Umgebung von  $x$ . Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $C_n \not\subset f^{-1}(U)$ , denn sonst wäre auch  $f^{-1}(U)$  als Obermenge eine Umgebung von  $x$ . Wir wählen ein Element  $x_n \in C_n \setminus f^{-1}(U)$ . Die Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert gegen  $x$ , was man ähnlich wie im dritten Absatz sieht. Aber die Folge  $f(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  kann nicht gegen  $f(x)$  konvergieren, weil für jedes  $n \in \mathbb{N}$  das Element  $f(x_n)$  nicht in  $U$  liegt. Deswegen ist  $f$  nicht folgenstetig in  $x$ .  $\square$

**Korollar 1.9.5.** *Eine Teilmenge  $A$  eines topologischen Raumes  $(X, \mathcal{T})$  mit Eigenschaft (AZ1) ist genau dann abgeschlossen wenn für jede konvergierende Folge  $x_n \rightarrow x$  in  $X$  mit  $(x_n) \subset A$  auch  $x \in A$  gilt.*

*Beweis.* Angenommen  $A$  ist abgeschlossen, dann ist  $A = \overline{A}$  und  $A$  enthält nach Satz 1.9.4.1 alle Grenzwerte von Folgen in  $A$ . Wenn umgekehrt  $A$  alle Grenzwerte enthält dann gilt  $A \supset \overline{A}$  und  $A$  ist abgeschlossen.  $\square$

**Satz 1.9.6** (Urysohnscher Einbettungssatz). *Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum, der die Abzählbarkeitseigenschaft (AZ2) erfülle. Dann gibt es eine abzählbare dichte Teilmenge in  $X$ .*

*Beweis.* Sei  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ein abzählbares System von Basismengen. Wähle für jedes  $n \in \mathbb{N}$  einen Punkt  $p_n \in B_n$ . Dann ist die Menge  $P := \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dicht.

Denn in jeder Umgebung  $U \in \mathcal{U}(x)$  jedes Punktes  $x \in X$  liegt eine offene Menge  $O \subset U$ , die  $x$  enthält.  $O$  enthält eine offene Menge  $B_i$  der Basis und somit den Punkt  $p_i$ . Also  $p_i \in B_i \subset O \subset U$  und damit ist  $U \cap P \neq \emptyset$ .  $\square$

## 1.10 Initialtopologie und Produkt

Wir wollen uns nun der Konstruktion neuer topologischer Räume aus alten zuwenden. Wenn wir eine Familie von Mengen  $\{A_i\}_{i \in I}$  haben, können wir zum Beispiel das kartesische Produkt  $\prod_{i \in I} A_i$  oder die disjunkte Vereinigung  $\coprod_{i \in I} A_i$  bilden.

Wir wenden uns zuerst dem Produkt zu. Wenn wir die gleiche Konstruktion mit topologischen Räumen  $\{(X_i, \mathcal{T}_i)\}_{i \in I}$  durchführen wollen, dann können wir  $\prod_i X_i$  als zugrunde legende Menge verwenden. Aber welche Topologie verwenden wir?

Wir erinnern uns, dass das Produkt  $\prod_i X_i$  natürliche Projektionen  $\pi_i : \prod X_i \rightarrow X_i$  zu all seinen Faktoren hat. All diese Projektionen sollten stetig sein.

Wir definieren:

**Definition 1.10.1.** Gegeben sei eine Menge  $M$ , eine Familie von topologischen Räumen  $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$  und eine Familie von Abbildungen  $(f_i : M \rightarrow X_i)_{i \in I}$ . Die **Initialtopologie** auf  $M$  bezüglich der Familie  $(f_i)_{i \in I}$  ist die größte Topologie, so dass alle  $f_i$  stetig sind.

Wir müssen natürlich zeigen, dass eine solche Topologie existiert.

Warum haben wir die größte Topologie gewählt und nicht die feinste? Die feinste Topologie auf  $M$  ist die diskrete Topologie. Sie macht offensichtlich alle  $f_i$  stetig und enthält gleichzeitig keinerlei Informationen über die  $f_i$ .

**Beispiel 1.10.2.** Die Unterraumtopologie auf  $U \subset X$  aus Definition 1.6.1 ist die Initialtopologie bezüglich der Inklusion  $U \rightarrow X$ .

Der folgende Satz rechtfertigt unsere Definition. Man beachte, dass dies eine Verallgemeinerung von Satz 1.6.2 ist.

**Satz 1.10.3.** *Mit Notation wie in Definition 1.10.1 gilt: Die Initialtopologie auf  $M$  ist eindeutig definiert und hat die Subbasis*

$$\mathcal{S} := \cup_{i \in I} \{f_i^{-1}(O_i) \mid O_i \in \mathcal{T}_i\} .$$

*Überdies gilt die folgende universelle Eigenschaft: Ist  $T$  ein beliebiger topologischer Raum, so ist eine Abbildung  $g : T \rightarrow M$  genau dann stetig, wenn die Kompositionen  $f_i \circ g : T \rightarrow X_i$  für alle  $i \in I$  stetig sind,*

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{g} & (M, \mathcal{T}) \\ & \searrow f_i \circ g & \downarrow f_i \\ & & (X_i, \mathcal{T}_i) \end{array}$$

Man könnte die Initialtopologie auch direkt mit der universellen Eigenschaft definieren. Aber auch dann muss die Existenz gezeigt werden. Oder man definiert die offenen Mengen über die Subbasis, dann ist die Existenz klar, aber die universelle Eigenschaft muss gezeigt werden.

*Beweis.* Die Initialtopologie  $\mathcal{T}$  muss sicher die Mengen in der Subbasis  $\mathcal{S}$  enthalten, denn andernfalls wäre eine der  $f_i$  nicht stetig. Nach Satz 1.8.3 gibt es eine größte solche Topologie, nämlich  $\mathcal{T} = \langle \mathcal{S} \rangle$ .

Es bleibt zu zeigen, dass die durch  $\mathcal{S}$  erzeugte Topologie die universelle Eigenschaft erfüllt. Klar ist eine Richtung: wenn  $g : T \rightarrow (M, \mathcal{T})$  stetig ist, so ist die Verkettung  $f_i \circ g$  stetig.

Seien also umgekehrt die Abbildungen  $f_i \circ g$  für alle  $i \in I$  stetig. Wir müssen wegen Satz 1.8.5 zeigen, dass für jedes  $S \in \mathcal{S}$  die Menge  $g^{-1}(S)$  offen in  $T$  ist. Nun ist aber für ein  $i \in I$  und  $O_i \in \mathcal{T}_i$  die Menge  $S = f_i^{-1}(O_i)$ . Dann ist

$$g^{-1}(S) = g^{-1}f_i^{-1}(O_i) = (f_i \circ g)^{-1}(O_i)$$

offen, da  $f_i \circ g$  stetig ist. □

Wir kehren zurück zum kartesischen Produkt von Mengen. Für eine beliebige Familie  $X_i$  von Mengen ist  $\prod_{i \in I} X_i$  die Menge, deren Elemente Familien  $(x_i)_{i \in I}$  von Elementen mit  $x_i \in X_i$  sind. Es existiert für jedes  $i$  eine Projektion

$$\begin{aligned} \pi_i : \prod_{j \in I} X_j &\rightarrow X_i \\ (x_j)_{j \in I} &\mapsto x_i , \end{aligned}$$

für die die folgende universelle Eigenschaft gilt: Ist  $T$  eine beliebige Menge, so gibt es eine Bijektion zwischen Abbildungen  $f : T \rightarrow \prod_{j \in I} X_j$  und Familien von Abbildungen  $(f_i : T \rightarrow X_i)_{i \in I}$ ,

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{f} & \prod_{j \in I} X_j \\ & \searrow f_i & \downarrow \pi_i \\ & & X_i \end{array}$$

die gegeben ist durch

$$\begin{aligned} \text{Hom}(T, \prod_{j \in I} X_j) &\rightarrow \prod_{j \in I} \text{Hom}(T, X_j) \\ f &\mapsto (\pi_j \circ f)_{j \in I}. \end{aligned}$$

Hier steht  $\text{Hom}(-, -)$  für die Menge aller Abbildungen zwischen zwei Mengen. Die Umkehrabbildung schickt die Familie  $(f_i)_{i \in I}$  auf die Abbildung

$$\begin{aligned} f : T &\rightarrow \prod_{j \in I} X_j \\ t &\mapsto (\dots, f_j(t), \dots) \end{aligned}$$

Wir beschreiben also die Menge  $\prod_{j \in I} X_j$  dadurch, dass wir die Abbildungen aus einer beliebigen Menge  $T$  in das kartesische Produkt  $\prod_{j \in I} X_j$  hinein beschreiben.

**Definition 1.10.4.** Sei  $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$  eine Familie topologischer Räume. Die Initialtopologie auf der Menge  $X := \prod_{i \in I} X_i$  bezüglich der Projektionen  $\pi_i : \prod_{j \in I} X_j \rightarrow X_i$  heißt die **Produkttopologie** auf  $X$ .

Die universelle Eigenschaft der Produkttopologie bedeutet, dass wir, wie in der Analysis, Abbildungen komponentenweise auf Stetigkeit prüfen können.

**Satz 1.10.5.** Die Produkttopologie  $(\prod_{i \in I} X_i, \mathcal{T})$  hat die Basis

$$\mathcal{B} = \left\{ \prod_{i \in I} O_i \mid O_i \in \mathcal{T}_i, O_i = X_i \text{ für fast alle } i \in I \right\}$$

*Beweis.* Nach Satz 1.10.3 hat die Produkttopologie eine Subbasis bestehend aus den  $\pi_i^{-1}(O_i)$  für  $O_i \in \mathcal{T}_i$ . Es gilt

$$\pi_i^{-1}(O_i) = \prod_{j \in I} O_j \quad \text{mit} \quad O_j = \begin{cases} X_j & \text{für } j \neq i \\ O_i & \text{für } j = i \end{cases}$$

Die Basis besteht also nach Satz 1.8.3 aus den endlichen Schnitten dieser Mengen. Wir betrachten eine beliebige endliche Familie offener Mengen in den  $X_i$ , die wir als  $\{O_{aj}\}_{a \in A(j), j \in J}$  schreiben mit  $O_{aj} \in X_j$ . Endlich heißt insbesondere, dass  $J$  und alle  $A(j)$  endlich sind. Dann gilt

$$\bigcap_{a \in A(j), j \in J} \pi_j^{-1}(O_{aj}) = \prod U_i \quad \text{mit} \quad U_j = \begin{cases} X_j & \text{für } j \notin J \\ \bigcap_{a \in A(j)} O_{aj} \in \mathcal{T}_j & \text{für } j \in J \end{cases}$$

Da  $J$  endlich ist sind damit die endlichen Schnitte der Subbasis genau die Elemente von  $\mathcal{B}$ .  $\square$



**Satz 1.10.6.** Sei weiterhin  $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$  eine Familie topologischer Räume. Es gibt eine Bijektion zwischen Familien stetiger Funktionen  $(f_i : T \rightarrow X_i)_{i \in I}$  und stetigen Funktion  $f : T \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$ .

*Beweis.* Wir haben eine Bijektion von Funktionen aufgrund der universellen Eigenschaft des kartesischen Produkts von Mengen, insbesondere definieren wir

$$f(t) = (\dots, f_i(t), \dots).$$

Es bleibt, zu prüfen, dass  $f$  genau dann stetig ist, wenn alle  $f_i$  stetig sind. Da für alle  $i \in I$  gilt dass  $\pi_i \circ f = f_i$  folgt dies aus der universellen Eigenschaft der Initialtopologie aus Satz 1.10.3.  $\square$

**Beispiele 1.10.7.**

1.  $\mathbb{R}^n$  wird mit der Produkttopologie der euklidischen Topologie auf  $\mathbb{R}$  versehen. Die Basis besteht aus offenen Quadern. Man prüft leicht, dass die Produkttopologie mit der euklidischen Topologie auf  $\mathbb{R}^n$  übereinstimmt.
2. Sei für jedes  $i \in I$  eine Teilmenge  $A_i \subset X_i$  gegeben. Einerseits können wir  $A_i$  mit der Unterraumtopologie versehen und dann auf dem Produkt  $\prod A_i$  der topologischen Räume die Produkttopologie  $\mathcal{T}_{\prod A_i}$  betrachten. Andererseits ist  $\prod_{i \in I} A_i \subset \prod_{i \in I} X_i$  eine Teilmenge. Versehen wir  $\prod_{i \in I} X_i$  mit der Produkttopologie, so hat die Teilmenge nach Definition 1.6.1 eine Unterraumtopologie  $\mathcal{T}_{\prod_{i \in I} A_i | \prod_{i \in I} X_i}$ . Beide Topologien sind gleich,

$$\mathcal{T}_{\prod A_i} = \mathcal{T}_{\prod_{i \in I} A_i | \prod_{i \in I} X_i}.$$

Denn eine Subbasis der Produkttopologie auf  $\prod A_i$  ist gegeben durch die Mengen  $\pi_i^{-1}(O)$  mit  $O$  offen in  $A_i$ . Nun ist aber  $O = A_i \cap \tilde{O}$  mit  $\tilde{O} \in \mathcal{T}_{X_i}$ . Wir bezeichnen mit  $\tau_i$  die Verknüpfung der Inklusion  $\prod A_j \subset \prod X_j$  mit der Projektion von  $\prod X_j$  nach  $X_i$ . Das ist die gleiche Abbildung wie die Verknüpfung von  $\pi_i$  mit der Inklusion  $A_i \subset X_i$ . Dann ist

$$\pi_i^{-1}(O_i) = \pi_i^{-1}(A_i) \cap \tau_i^{-1}(\tilde{O}) = \left( \prod_j A_j \right) \cap \tau_i^{-1}(\tilde{O}).$$

Damit sind die  $\pi_i^{-1}(O_i)$  auch eine Subbasis der Unterraumtopologie.

3. Insbesondere ist mit  $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$  der  $n$ -**Torus**  $\underbrace{\mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1}_n$  in natürlicher Weise ein topologischer Raum.
4. Sei  $X_i$  für alle  $i \in I$  ein diskreter topologischer Raum mit  $|X_i| > 1$ . Dann ist die Produkttopologie auf  $\prod_{i \in I} X_i$  genau dann diskret, wenn  $I$  endlich ist.

Denn ist  $I = \{1, 2, \dots, n\}$  endlich, so ist  $O_1 \times O_2 \times \dots \times O_n$  mit beliebigen Teilmengen

$$O_i \in \mathcal{T}_i = \mathcal{P}(X_i)$$

eine Basis der Topologie von  $\prod_{j \in I} X_j$ . Somit ist  $\mathcal{T}_{\prod_{i \in I} X_i} = \mathcal{P}(\prod_{i \in I} X_i)$  und die Topologie auf dem Produkt ist diskret.

Ist dagegen  $I$  unendlich, so treten in der Basis der Produkttopologie nur Mengen der Form  $\prod O_i$  mit  $O_i = X_i$  für fast alle  $i \in I$  auf. Nur Mengen dieser Form sind offen, die Topologie kann daher nicht diskret sein.

5. Was passiert, wenn unsere Indexmenge  $I$  leer ist? Diese Frage ist nicht so uninteressant, wie sie klingt. Die folgende Diskussion gilt für topologische Räume genau wie für Mengen.

Die Menge  $\prod_{\emptyset}$  hat genau ein Element, nämlich die leere Familie  $(\ )$ . Die universelle Eigenschaft besagt, dass wir für jede Menge  $T$  mit Funktionen  $\{f_i : T \rightarrow X_i\}_{i \in \emptyset}$  eine eindeutige Funktion  $T \rightarrow \prod X_i$  haben. Die Bedingung über Funktionen ist aber leer, also muss es für jede Menge  $T$  genau eine Funktion  $T \rightarrow \prod_{\emptyset}$  geben. Diese universelle Eigenschaft erfüllt die Menge mit einem Element.

## 1.11 Finaltopologie und Summe

Dual zum Begriff der Initialtopologie ist der Begriff der Finaltopologie.

**Definition 1.11.1.** Gegeben sei eine Menge  $M$ , eine Familie von topologischen Räumen  $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$  und eine Familie von Abbildungen  $(f_i : X_i \rightarrow M)_{i \in I}$ . Die **Finaltopologie** auf  $M$  bezüglich  $(f_i)_{i \in I}$  ist die feinste Topologie so dass alle  $f_i$  stetig sind.

Der folgende Satz ist Dual zu Satz 1.10.3.

**Satz 1.11.2.** *Auf  $M$  gibt es bezüglich  $(f_i)_{i \in I}$  eine eindeutig bestimmte Finaltopologie. Die offenen Mengen sind*

$$\mathcal{T} := \{O \subset M \quad \text{so dass} \quad f_i^{-1}(O) \in \mathcal{T}_i \quad \text{für alle} \quad i \in I \}.$$

*Die Finaltopologie erfüllt die folgende unverselle Eigenschaft: Ist  $T$  ein beliebiger topologischer Raum, so ist eine Abbildung  $g : M \rightarrow T$  genau dann stetig, wenn  $g \circ f_i : X_i \rightarrow T$  für alle  $i \in I$  stetig ist,*

$$\begin{array}{ccc} (M, \mathcal{T}) & \xrightarrow{g} & T \\ f_i \uparrow & \nearrow g \circ f_i & \\ (X_i, \mathcal{T}_i) & & \end{array}$$

*Beweis.* Die Finaltopologie  $\mathcal{T}$  ist eine Topologie da alle Urbilder mit Schnitten und Vereinigungen kommutieren. Sei  $\mathcal{T}'$  eine andere Topologie, so dass alle  $f_i$  stetig. Sei  $U \in \mathcal{T}'$ , dann sind alle  $f_i^{-1}(U)$  offen, also ist  $U \in \mathcal{T}$ , also ist  $\mathcal{T}$  feiner als  $\mathcal{T}'$ .

Wir beweisen die universelle Eigenschaft. Wenn  $g : T \rightarrow (M, \mathcal{T})$  stetig ist, so sind die Verkettungen  $f_i \circ g$  stetig.

Seien umgekehrt die Abbildungen  $g \circ f_i$  für alle  $i \in I$  stetig. Sei  $O \in \mathcal{T}$ . Wir müssen zeigen, dass  $g^{-1}(O)$  offen ist. Per Definition reicht es zu zeigen, dass alle  $f_i^{-1}g^{-1}(O)$  offen sind, was aus der Stetigkeit der  $g \circ f_i$  folgt.  $\square$

Als nächstes erinnern wir an den Begriff aus der Mengenlehre, der dual zum kartesischen Produkt von Mengen ist.

Gegeben sei eine Familie von Mengen  $(X_j)_{j \in I}$ . Bilde die Familie von Mengen

$$X'_j := \{(x_j, j) \mid x_j \in X_j\} = X_j \times \{j\} .$$

Dann ist die **disjunkte Vereinigung** die Menge

$$\coprod_{j \in I} X_j := \cup_{j \in I} X'_j .$$

Sie kommt mit Injektionen

$$\begin{aligned} \iota_i : X_i &\rightarrow \coprod_{j \in I} X_j \\ x_i &\mapsto (x_i, i) \in X'_i , \end{aligned}$$

für die die folgende universelle Eigenschaft gilt: Ist  $T$  eine beliebige Menge, gibt es eine Bijektion zwischen Abbildungen  $f : \coprod_{j \in I} X_j \rightarrow T$  und Familien von Abbildungen  $(f_i : X_i \rightarrow T)_{i \in I}$ ,

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{j \in I} X_j & \xrightarrow{f} & T \\ \uparrow \iota_i & \nearrow f_i & \\ X_i & & \end{array}$$

die gegeben ist durch

$$\begin{aligned} \text{Hom}(\coprod_{j \in I} X_j, T) &\rightarrow \prod_{j \in I} \text{Hom}(X_j, T) \\ f &\mapsto (f \circ \iota_j)_{j \in I} \end{aligned}$$

Die Umkehrabbildung schickt eine Familie  $(f_j)_{j \in I}$  auf die Abbildung

$$\begin{aligned} f : \coprod_{j \in I} X_j &\rightarrow T \\ (x_j, j) &\mapsto f_j(x_j) \end{aligned}$$

Wir beschreiben also die Menge  $\coprod_{j \in I} X_j$  dadurch, dass wir die Abbildungen aus  $\coprod_{j \in I} X_j$  heraus in eine beliebige Menge  $T$  hinein beschreiben. Die disjunkte Vereinigung ist also dual zum Produkt. Wer werden später auf diesen Punkt zurückkommen.

**Definition 1.11.3** (Topologische Summen). Gegeben seien topologische Räume  $(X_j, \mathcal{T}_j)_{j \in J}$ . Die Topologie auf der disjunkten Vereinigung  $X = \coprod_{i \in I} X_i$  mit offenen Mengen

$$\mathcal{T} = \{O \subset X \mid O \cap X_j \in \mathcal{T}_j \text{ für alle } j \in I\}$$

heißt **Summentopologie** auf  $X$ .

Statt  $O \cap X_j$  sollten wir korrekter  $\iota_j^{-1}(O) \subset X_j$  schreiben. Wir identifizieren aber stillschweigend  $X_j$  mit  $\iota_j(X_j) \subset X$ .

Es folgt direkt aus Satz 1.11.2, dass die Summentopologie genau die Finaltopologie auf  $\coprod_{j \in I} X_j$  ist.

**Satz 1.11.4** (Universelle Eigenschaft der direkten Summe). Seien  $(X_j, \mathcal{T}_j)_{j \in J}$  und  $(T, \mathcal{S})$  topologische Räume. Es gibt eine Bijektion zwischen Familien stetiger Abbildungen  $(g_j : X_j \rightarrow T)_{j \in I}$  und stetigen Abbildung  $g : X = \coprod_{j \in I} X_j \rightarrow T$  mit  $g_j = g \circ \iota_j$ .

*Beweis.* Die Bijektion von Funktionen existiert für Abbildung von Mengen wegen der universellen Eigenschaft der disjunkten Vereinigung von Mengen. Wegen der universellen Eigenschaft der Finaltopologie ist  $g$  stetig genau wenn alle  $g \circ \iota_j$  stetig sind.  $\square$

Die leere Vereinigung  $\amalg_\emptyset$  ist die leere Menge (mit ihrer trivialen Topologie), dies erfüllt Satz 1.11.4 da es immer genau eine Funktion von der leeren Menge gibt.

**Bemerkung 1.11.5.** Sei  $X$  ein topologischer Raum, der als Menge eine disjunkte Vereinigung von Untermengen ist,  $X = \dot{\cup}_{i \in I} X_i$ , die alle offen in  $X$  sind. (Wegen  $X_j = X \setminus \cup_{i \neq j} X_i$  ist dann auch jedes  $X_i$  abgeschlossen in  $X$ .) Dann ist die Abbildung  $X \rightarrow \amalg_{i \in I} X_i$ , die  $x_i \in X_i$  auf  $(x_i, i) \in \amalg_{i \in I} X_i$  schickt, injektiv, surjektiv, stetig und offen. Also ist  $X$  als topologischer Raum homöomorph zur Summe  $X \cong \amalg_{i \in I} X_i$ .

Die Annahme, dass alle  $X_i$  offen sind ist notwendig.  $[0, 1] \amalg (1, 2]$  ist nicht homöomorph zu  $[0, 2]$ . Die Aussage ist scheinbar offensichtlich, aber nicht ganz trivial zu beweisen. Man sieht leicht, dass  $[0, 1] \amalg (1, 2]$  homöomorph zu  $[0, 1] \cup (2, 3] \subset \mathbb{R}$  ist. Wenn es also eine stetige Surjektion von  $[0, 2]$  nach  $[0, 1] \amalg (1, 2]$  gibt, dann gibt es durch Verknüpfung eine stetige Funktion  $[0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  deren Bild 0 und 3 enthält, nicht aber 2. Das widerspricht dem Zwischenwertsatz.

Wir werden bald zahlreiche Techniken entwickeln, die solche Beweise einfacher machen.

## 1.12 Quotientenräume

Wir wenden uns nun dem dualen Konzept zur Unterraumtopologie zu.

**Definition 1.12.1.** Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $\sim$  eine Äquivalenzrelation auf  $X$ . Sei  $\pi : X \rightarrow X/\sim$  die kanonische Projektion. Die Finaltopologie auf  $X/\sim$  bezüglich  $\pi$  heißt **Quotiententopologie**  $\mathcal{T}_\sim$  und  $X/\sim$  heißt **Quotientenraum** von  $X$  bezüglich der Äquivalenzrelation  $\sim$ .

Es ist also  $O \subset X/\sim$  nach Satz 1.11.2 genau dann offen, wenn  $\pi^{-1}(O)$  offen in  $X$  ist.

Aus Satz 1.11.2 folgt auch sofort:

**Satz 1.12.2.** Sei  $\pi : X \rightarrow X/\sim$  wie in Definition 1.12.1. Die Abbildung  $f : X/\sim \rightarrow Y$  ist genau dann stetig ist wenn  $f \circ \pi$  stetig ist.

Auch wenn duale Begriffe formal sehr ähnlich sind, gilt dennoch zu beachten: Die Beispiele die aus dualen Phänomenen erwachsen können sehr unterschiedlich sein. Psychologisch fällt uns oft ein Konzept deutlich leichter als sein Duales. Die meisten von uns finden Untergruppen und Unterräume freundlicher als Quotientengruppen und Quotientenräume. Aber zahlreiche interessante Beispiele für topologische Räume treffen wir zuerst als Quotientenräume.

**Beispiel 1.12.3.** Betrachte auf  $X = \mathbb{R}$  die Äquivalenzrelation mit  $x \sim y$  genau dann, wenn  $x - y \in \mathbb{Z}$ . Wir schreiben  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  für  $\mathbb{R}/\sim$  und sehen, dass  $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong \mathbb{S}^1$ .

Hierzu betrachten wir

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \exp(2\pi it) \end{aligned}$$

Die Abbildung ist stetig und faktorisiert durch  $\bar{f} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{S}^1$ . Nach der universellen Eigenschaft der Quotiententopologie (Satz 1.12.2) ist die induzierte Funktion  $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^2$  stetig, und nach der universellen Eigenschaft der Unterraumtopologie (Satz 1.6.2) auch  $\bar{f} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{S}^1$ . Da  $\bar{f}$  bijektiv ist, müssen wir nur noch prüfen, dass es offen ist. Aber das ist ersichtlich.

**Definition 1.12.4.** Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum und  $A \subset X$  nicht leer. Betrachte die Äquivalenzrelation mit  $a \sim_A a'$  falls  $a, a' \in A$ , und  $(x \sim_A x)$  für alle  $x$ . Dann setze

$$X/A := X/\sim_A .$$

Wir setzen  $X/\emptyset = X \amalg \{*\}$ .

Im Quotientenraum  $X_A$  werden also alle Punkte der Teilmenge  $A \subset X$  zu einem Punkt identifiziert (selbst wenn es keine Punkte in  $A$  gibt). Damit hat  $X/A$  immer einen ausgezeichneten Punkt.

Wir beachten, dass dies mit der Notation in Beispiel 1.12.3 in Konflikt steht, und ignorieren diesen Punkt vorerst.

### Beispiele 1.12.5.

1. Seien  $X, Y$  topologische Räume und Punkte  $x_0 \in X, y_0 \in Y$  gewählt. Dann betrachte  $A := \{x_0, y_0\} \subset X \amalg Y$ . Dann heißt

$$X \vee Y := X \amalg Y/A = X \amalg Y/x_0 \sim y_0$$

das **Bouquet** oder die **verbundene Summe** von  $X$  und  $Y$ . Es hängt im Allgemeinen von der Wahl der Punkte  $x_0, y_0$  ab.

Zum Beispiel ist  $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$  eine Figur von der Form zweier sich berührender Kreise, also eine 8.

2. Als Quotienten des Quadrates  $[0, 1]^2$  finden wir den Zylinder, das Möbiusband, den Torus und die Kleinsche Flasche. Den Torus haben wir schon als  $(\mathbb{S}^1)^2$  kennengelernt, einen Beweis reichen wir später nach.
3. Der Quotient  $\mathbb{D}^2/\partial\mathbb{D}^2$  ist die Sphäre  $\mathbb{S}^2$ .

Man kann dies zum Beispiel sehen, indem man  $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$  erst durch stereografische Projektion nach  $\mathbb{R}^2$  und dann in das Innere von  $\mathbb{D}^2$  schickt.  $N$  wird mit dem Punkt  $\infty$  identifiziert, der  $\partial D$  repräsentiert. Diese Abbildung ist bijektiv.

Es ist noch Stetigkeit zu prüfen, wobei vor allem Stetigkeit in  $N$  bzw.  $\infty$  interessant ist. Es reicht, die Komplemente der offenen Umgebungen von  $N$  und  $\infty$  zu identifizieren. Die Komplemente der offenen Umgebungen von  $N$  sind genau die abgeschlossenen Teilmengen, die disjunkt von  $N$  sind. , Genauso sind die Komplemente der offenen Umgebungen von  $\infty$  die abgeschlossener Teilmengen von  $\mathbb{D}^2$ , die disjunkt von  $\partial\mathbb{D}^2$  sind. Diese Mengen werden von der stereographischen Projektion identifiziert.

4. Seien  $X, Y$  mit Punkten  $x_0 \in X$  und  $y_0 \in Y$  wie in 1. gewählt. Die Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} X & \rightarrow & X \times Y & \text{und} & Y & \rightarrow & X \times Y \\ x & \mapsto & (x, y_0) & & y & \mapsto & (x_0, y) \end{array}$$

induzieren eine Abbildung  $X \amalg Y \rightarrow X \times Y$ , die  $x_0$  und  $y_0$  auf den gleichen Punkt  $(x_0, y_0)$  schickt, sonst aber injektiv ist und daher eine Injektion

$$X \vee Y \rightarrow X \times Y .$$

Dann heißt der topologische Raum  $X \wedge Y := X \times Y / X \vee Y$  das **Smashprodukt** von  $X$  und  $Y$ .

Wir überlegen uns als Beispiel das Smashprodukt  $\mathbb{S}^1 \wedge \mathbb{S}^1$ . Das Produkt  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  ist ein zweidimensionaler Torus, die Teilmenge  $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$  darin sind ein Meridian und eine Länge, die sich in einem Punkt schneiden. Kontrahiert man diese auf einen Punkt, so erhält man die Sphäre  $\mathbb{S}^2$ , das folgt aus Beispielen 2 und 3.

Allgemeiner gilt  $\mathbb{S}^n \wedge \mathbb{S}^m \cong \mathbb{S}^{n+m}$ .

5. Betrachte die auf  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  von  $x \sim -x$  erzeugte Äquivalenzrelation. Der Raum  $\mathbb{R}P^2 := \mathbb{S}^2 / \sim$  heißt **projektive Ebene**.

Betrachte auf  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  die Äquivalenzrelation  $x \approx y$ , falls es  $\lambda \neq 0$  gibt, so dass  $x = \lambda y$ . Ähnlich betrachte auf der abgeschlossenen Kreisscheibe  $\mathbb{D}^2 \subset \mathbb{R}^2$  die Äquivalenzrelation mit  $x \sim -x$  für  $x \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{D}^2$ , bei der antipodale Punkte auf dem Rand der Kreisscheibe identifiziert werden. Dann gilt

$$\mathbb{R}P^2 := \mathbb{S}^2 / \sim \cong \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} / \approx \cong \mathbb{D}^2 / \sim .$$

Man kann direkt zeigen, dass die natürlichen Abbildungen Homöomorphismen sind. Zum Beispiel induziert die natürliche Einbettung  $\mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  eine Bijektion  $j$  der Quotienten. Da  $\mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} / \approx$  stetig ist, folgt aus der universellen Eigenschaft der Quotientientopologie (Satz 1.11.2), dass auch  $j$  stetig ist. Man kann nun entweder direkt prüfen, dass  $j$  auch offen ist, oder mithilfe der Funktion  $x \mapsto x/||x||$  ein Inverses von  $j$  konstruieren (das wieder nach der universellen Eigenschaft stetig ist).

6. Definiere auf  $X := \mathbb{R} \times \{\pm 1\}$  die Äquivalenzrelation  $(x, 1) \sim (x, -1)$  für  $x \neq 0$ . (Aber  $(0, 1)$  und  $(0, -1)$  sind nicht äquivalent.) Der Quotientenraum ist eine "Gerade mit zwei Ursprüngen". Man kann die beiden Punkte  $(0, -1)$  und  $(0, 1)$  nicht durch disjunkte offene Umgebungen trennen.

### 1.13 Hausdorffsche Räume

Eine wichtige Eigenschaft metrischer Räume ist, dass es genug offene Mengen gibt, um alle Punkte voneinander zu unterscheiden.

**Definition 1.13.1.** Ein topologischer Raum  $(X, \mathcal{T})$  heißt **Hausdorff-Raum** oder **Hausdorffscher Raum** wenn es für jedes Paar von verschiedenen Punkten  $x, y \in X$  Umgebungen  $x \in U$  und  $y \in V$  gibt so dass  $U \cap V = \emptyset$ .

Die Hausdorff-Eigenschaft ist ein Beispiel für eine **Trennungseigenschaft**. Es gibt zahlreiche weitere, die aber deutlich weniger bedeutsam sind.

**Satz 1.13.2.** *Jeder metrisierbare Raum ist ein Hausdorff-Raum.*

*Beweis.* Wähle  $\epsilon$  kleiner als die Hälfte des Abstandes der beiden Punkte. Dann sind die  $\epsilon$ -Umgebungen der Punkte disjunkt.  $\square$

Man sieht leicht dass in Hausdorff-Räumen Grenzwerte von Folgen eindeutig sind. Das gilt nicht in allgemeinen topologischen Räumen, wir erinnern uns aus Beispiel 1.7.11 dass in der indiskreten Topologie Grenzwerte nicht eindeutig sind.

Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum. Wir erinnern uns aus Kapitel 1.10, dass  $X \times X$  mit der Produkttopologie wieder ein topologischer Raum ist. Wir können Hausdorff-Räume auch folgendermaßen charakterisieren:

**Satz 1.13.3.** *Ein topologischer Raum ist genau dann Hausdorffsch, wenn die Diagonale*

$$\Delta := \{(x, x) \in X \times X\} \subset X \times X$$

*in  $X \times X$  abgeschlossen ist.*

*Beweis.* Es ist  $x \neq y$  genau dann, wenn  $(x, y) \notin \Delta$ . Die Diagonale  $\Delta$  ist genau dann abgeschlossen, wenn ihr Komplement  $X \times X \setminus \Delta$  offen ist, d.h. wenn es für jedes  $(x, y) \notin \Delta$  offene Mengen  $O_1, O_2$  gibt mit  $(x, y) \in O_1 \times O_2 \subset X \times X \setminus \Delta$ . Das ist aber genau dann der Fall, wenn  $x \in O_1, y \in O_2$  und  $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ . Dann ist aber  $X$  nach Definition Hausdorffsch.  $\square$

**Satz 1.13.4.** *Ist ein topologischer Raum  $X$  Hausdorffsch, so ist auch jede Teilmenge  $Y \subset X$  mit der induzierten Topologie Hausdorffsch.*

*Beweis.* Sei  $X$  Hausdorffsch,  $Y \subset X$  und  $x_1, x_2 \in Y$  mit  $x_1 \neq x_2$ . Da  $X$  Hausdorffsch ist, gibt es Umgebungen  $U_1$  von  $x_1$  und  $U_2$  von  $x_2$  mit  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ . Dann sind  $U'_i := U_i \cap Y$  Umgebungen von  $x_i$  im Unterraum  $Y$  und auch disjunkt,  $U'_1 \cap U'_2 = \emptyset$ .  $\square$

In Beispiel 1.12.5.6 haben wir gesehen (auch wenn wir das Vokabular noch nicht kannten), dass der Quotient eines Hausdorffschen Raumes nicht Hausdorff sein muss. Es gilt aber:

**Satz 1.13.5.** *Sei  $X$  ein Hausdorff-Raum und  $A \subset X$  mit der Eigenschaft, dass es für jedes  $x \notin A$  disjunkte offene Mengen  $U$  und  $V$  gibt mit  $x \in U$  und  $A \subset V$ . Dann ist  $X/A$  Hausdorffsch.*

*Beweis.* Seien  $x, y \in X/A$  verschiedene Punkte. Sind beide vom Punkt  $[A]$  verschieden, so betrachte die eindeutigen Repräsentanten in  $X$  und disjunkte Umgebungen in  $X$ , die  $A$  nicht treffen. (Dies ist möglich da wir stets mit Umgebungen schneiden können, die  $A$  nicht treffen.)

Die Bilder dieser Umgebungen in  $X/A$  trennen die Punkte. Ist einer der Punkte  $y = [A]$ , so benutzen wir die Annahme, um das Urbild von  $x$  und  $A$  in  $X$  durch offenen Umgebungen zu trennen.  $\square$

Wir können nun eine wichtige Klasse von topologischen Räumen definieren.

**Definition 1.13.6.** Eine  *$n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit* ist ein Hausdorffscher Raum  $(X, \mathcal{T})$  mit einer abzählbaren Basis (in anderen Worten  $X$  erfüllt AZ2), der überdies die folgende Eigenschaft erfüllt: Für jeden Punkt  $x \in X$  gibt es eine Umgebung  $U \subset X$ , die homöomorph zur offenen Kugel in  $\mathbb{R}^n$  ist.

Beispiele sind  $\mathbb{R}^n$  selbst,  $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ , der  $n$ -torus  $(S^1)^{\times n}$  oder die projektive Ebene  $\mathbb{R}P^n$  aus Beispiel 1.12.5.5.

## 1.14 Zusammenhang

**Definition 1.14.1.** Ein topologischer Raum  $(X, \mathcal{T})$  heißt **zusammenhängend**, wenn er nicht die disjunkte Vereinigung zweier nichtleerer offener Teilmengen ist.

### Bemerkungen 1.14.2.

1. Äquivalent kann man einen zusammenhängenden Raum dadurch charakterisieren, dass er nicht disjunkte Vereinigung zweier nichtleerer abgeschlossener Teilmengen ist.
2. Kann man also einen zusammenhängenden topologischen Raum  $X$  schreiben als  $X = K_1 \cup K_2$  mit  $K_1 \cap K_2 = \emptyset$  sowie  $K_1$  und  $K_2$  beide offen (oder beide abgeschlossen), so gilt  $K_1 = \emptyset$  oder  $K_2 = \emptyset$ .
3. Ein topologischer Raum  $X$  ist genau dann zusammenhängend, wenn  $\emptyset$  und  $X$  die einzigen Teilmengen sind, die gleichzeitig offen und abgeschlossen sind.
4. Eine Menge  $X$  mit diskreter Topologie ist nicht zusammenhängend, falls sie mehr als ein Element hat.

**Korollar 1.14.3 (Zwischenwertsatz).** Sei  $X$  ein zusammenhängender topologischer Raum,  $Y$  ein topologischer Raum und  $f : X \rightarrow Y$  stetig. Dann ist das Bild  $f(X) \subset Y$  zusammenhängend.

*Beweis.* Angenommen, das Bild  $f(X)$  lässt sich schreiben als disjunkte Vereinigung von nicht-leeren offenen Mengen in  $f(X)$ ,  $f(X) = O_1 \dot{\cup} O_2$ . Dann gilt auch  $X = f^{-1}(O_1) \dot{\cup} f^{-1}(O_2)$  mit nicht-leeren offenen Mengen, im Widerspruch zur Annahme, dass  $X$  zusammenhängend ist  $\square$

Insbesondere ist ein zu einem zusammenhängenden Raum homöomorpher Raum zusammenhängend, Zusammenhang ist also eine topologische Eigenschaft.

**Satz 1.14.4.** Das Intervall  $[0, 1]$  mit der von der euklidischen Topologie auf  $\mathbb{R}$  induzierten Topologie ist zusammenhängend.

Da je zwei abgeschlossene Intervalle homöomorph sind, sind alle abgeschlossenen Intervalle zusammenhängend.

*Beweis.* Angenommen, wir finden eine Zerlegung  $[0, 1] = K_0 \amalg K_1$ , mit  $K_0, K_1$  offen und nicht-leer. Wir können  $1 \in K_1$  annehmen. Weil  $K_1$  offen ist, liegt eine Umgebung von 1 in  $K_1$ , also ist  $s := \sup K_0 < 1$ .

Angenommen  $s \in K_0$ . Dann finde, weil  $K_0$  offen ist, ein offenes Intervall  $B_\epsilon(s) \subset K_0$ . Dann ist aber  $s + \frac{\epsilon}{2} \in K_0$  und  $s$  nicht das Supremum von  $K_0$

Angenommen,  $s \in K_1$ . Dann finde, weil  $K_1$  offen ist, eine Umgebung  $B_\epsilon(s) \subset K_1$  von  $s$ . Dann kann aber  $s$  nicht das Supremum von  $K_0$  sein, weil alle Elemente von  $K_0$  kleiner als  $s - \frac{\epsilon}{2}$  sind.  $\square$

Aus unseren Ergebnissen folgt nun:



**Korollar 1.14.5** (Klassischer Zwischenwertsatz). Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall. Für jedes  $\zeta$  mit  $f(a) < \zeta < f(b)$  gibt es wenigstens ein  $t \in [a, b]$  mit  $f(t) = \zeta$ .

*Beweis.* Andernfalls zerlege das Bild

$$f([a, b]) = (f([a, b]) \cap (-\infty, \zeta)) \dot{\cup} (f([a, b]) \cap (\zeta, \infty))$$

in disjunkte nicht-leere offene Teilmengen. Aber nach Satz 1.14.4 ist  $[a, b]$  zusammenhängend und nach Korollar 1.14.3 damit auch  $f([a, b])$ . Das ist ein Widerspruch.  $\square$

Das folgende Lemma ist oft sehr hilfreich zur Charakterisierung zusammenhängender Räume.

**Lemma 1.14.6.** Ein topologischer Raum  $(X, \mathcal{T})$  ist genau dann zusammenhängend, wenn jede stetige Funktion von  $X$  in den diskreten Raum  $\mathbf{2} := \{0, 1\}$  konstant ist.

*Beweis.* Ist  $X$  nicht zusammenhängend, schreibe  $X = A \dot{\cup} (X \setminus A)$  mit  $A$  und  $X \setminus A$  offen und abgeschlossen. Dann ist die Funktion  $f : X \rightarrow \mathbf{2}$  mit  $f|_A = 0$  und  $f|_{X \setminus A} = 1$  nicht konstant auf  $X$ , aber stetig, weil die Urbilder offener Mengen offen sind.

Umgekehrt gebe es eine nicht-konstante stetige Funktion  $f : X \rightarrow \mathbf{2}$ . Dann ist  $X$  die Vereinigung der disjunkten nichtleeren offenen Mengen  $f^{-1}(0)$  und  $f^{-1}(1)$ .  $\square$

In Lemma 1.14.6 und seinem Beweis können wir  $\mathbf{2}$  mit einer beliebigen diskreten Menge ersetzen, zum Beispiel den ganzen Zahlen.

**Korollar 1.14.7.** Ist ein topologischer Raum  $X$  von einer Familie  $(X_j)$  zusammenhängender Unterräume überdeckt und sind je zwei  $X_j$  nicht disjunkt, so ist auch  $X$  zusammenhängend.

*Beweis.* Sei  $f : X \rightarrow \mathbf{2}$  eine beliebige stetige Funktion. Dann ist  $f|_{X_i}$  für alle  $i$  nach Lemma 1.14.6 konstant, weil jedes  $X_i$  zusammenhängend ist. Da die  $X_i$  nicht disjunkt sind, muss  $f$  auf ganz  $X$  konstant sein. Wiederum nach Lemma 1.14.6 ist daher  $X$  zusammenhängend.  $\square$

**Beispiele 1.14.8.**

1. Der topologische Raum  $\mathbb{R}$  mit der euklidischen Topologie ist zusammenhängend. Denn wähle als nicht-disjunkte Überdeckung  $(X_j = [-j, j])_{j \in \mathbb{N}}$ . Die abgeschlossenen Intervalle sind nach Satz 1.14.4 zusammenhängend.
2. Da nach Beispiel 1.5.5.1 jedes offene Intervall zu  $\mathbb{R}$  homöomorph ist, sind auch offene Intervalle zusammenhängend.
3. Die rationalen Zahlen  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  als Unterraum der reellen Zahlen sind nicht zusammenhängend. Sei  $\zeta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Dann schreibe

$$\mathbb{Q} = (\mathbb{Q} \cap (-\infty, \zeta)) \dot{\cup} (\mathbb{Q} \cap (\zeta, \infty)) .$$

Die Dedekindschen Schnitte zerteilen also  $\mathbb{Q}$  in disjunkte offene Mengen.

4. Der Kreis  $\mathbb{S}^1$  ist als Bild der nach Beispiel 1.14.8.1 zusammenhängenden Menge  $\mathbb{R}$  unter der stetigen Abbildung

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{S}^1 \\ t &\mapsto \exp(2\pi it) \end{aligned}$$

nach dem Zwischenwertsatz 1.14.3 zusammenhängend.

Da Zusammenhang invariant unter Homöomorphie ist, sehen wir leicht dass z.B.  $(0, 1) \amalg (1, 2)$  nicht homöomorph zu  $(0, 1)$  ist.

Wir können mit einem Trick mehr zeigen.

**Satz 1.14.9.** *Sei  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{S})$  ein Homöomorphismus und  $A \subset X$ . Dann ist  $X \setminus A \cong Y \setminus f(A)$ .*

*Beweis.* Die Restriktion von  $f$  ist eine Bijektion und ist stetig da  $X \setminus A \subset X$  stetig ist. Sei nun  $U \subset X \setminus A$  offen. Dann ist  $f(U)$  offen in  $Y$ . Da  $f$  bijektiv ist, sind  $f(U)$  und  $f(A)$  disjunkt und damit ist  $f(U)$  offen in  $Y \setminus f(A)$ .  $\square$

**Korollar 1.14.10.** *Keine zwei der Räume  $[0, 1]$ ,  $(0, 1)$ ,  $[0, 1)$  und  $\mathbb{S}^1$  sind homöomorph.*

*Beweisidee.* Angenommen  $f : [0, 1) \rightarrow \mathbb{S}^1$  ist ein Homöomorphismus. Dann ist es nach Satz 1.14.9 auch die Einschränkung  $f' : [0, 1/2) \cup (1/2, 1) \rightarrow \mathbb{S}^1 \setminus f(\frac{1}{2})$ .

Aber die rechte Seite ist durch die Exponentialfunktion homöomorph zu  $(0, 1)$ , und damit zusammenhängend. Die linke Seite hingegen ist nicht zusammenhängend. Die anderen Beweise sind ähnlich, siehe Übungsblatt.  $\square$

**Satz 1.14.11.** *Auf der Menge der Punkte eines topologischen Raumes  $X$  führen wir die folgende Relation ein:  $x \in X$  hängt mit  $y \in X$  zusammen, in Zeichen  $x \sim y$ , wenn es eine zusammenhängende Teilmenge  $C \subset X$  gibt, die  $x$  und  $y$  enthält,  $x, y \in C$ . Dies ist eine Äquivalenzrelation.*

*Beweis.* Die Relation ist offensichtlich symmetrisch und sie ist reflexiv, da  $C = \{x\}$  zusammenhängend ist. Um zu sehen, dass sie transitiv ist, finde für  $x, y, z \in X$  zusammenhängende Mengen  $C_1, C_2$  mit  $x, y \in C_1$  und  $y, z \in C_2$ . Dann ist  $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$ , so dass aus Korollar 1.14.7 folgt, dass die Vereinigung  $C_1 \cup C_2$  zusammenhängend ist; offenbar ist  $x, z \in C_1 \cup C_2$ .  $\square$

**Definition 1.14.12.** Sei  $X$  ein topologischer Raum. Die Äquivalenzklasse  $Z(x)$  von  $x \in X$  unter der Äquivalenzrelation "hängt zusammen" heißt die **Zusammenhangskomponente** von  $x$ .

Es ist klar, dass ein topologischer Raum als Menge die disjunkte Vereinigung seiner Zusammenhangskomponenten ist.

**Satz 1.14.13.** *Sei  $X$  ein topologischer Raum.*

1. *Jede Zusammenhangskomponente eines topologischen Raumes ist zusammenhängend.*
2. *Gilt für Teilmengen  $A, B \subset X$  die Relation  $A \subset B \subset \overline{A}$  und ist  $A$  zusammenhängend, so ist  $B$  zusammenhängend. Insbesondere ist  $\overline{A}$  zusammenhängend.*

3. Jede Zusammenhangskomponente eines topologischen Raumes ist abgeschlossen, aber nicht unbedingt offen.

*Beweis.* 1. Betrachte die Zusammenhangskomponente  $Z(x)$  eines Punktes  $x \in X$ . Für jedes  $y \in Z(x)$  können wir eine zusammenhängende Menge  $Z_y \subset X$  finden, die  $y$  und  $x$  enthält. Die Mengen  $Z_y$  überdecken die Zusammenhangskomponente  $Z(x)$  und sind nicht disjunkt, da sie alle  $x$  enthalten. Nach Korollar 1.14.7 ist  $Z(x)$  zusammenhängend.

2. Angenommen,  $B$  ist nicht zusammenhängend. Wähle nach Lemma 1.14.6 eine nicht-konstante Funktion  $f : B \rightarrow \mathbf{2} = \{0, 1\}$ . Die Einschränkung  $f|_A$  ist konstant, ohne Beschränkung der Allgemeinheit mit Wert 0, also ist das Urbild von 1 offen in  $B$  und schneidet nicht  $A$ . Es gibt also  $U$  offen in  $X$  mit  $U \subset B \setminus A$ . Aber nach Satz 1.7.5 besteht  $B$  aus Berührungspunkten von  $A$  und wir haben einen Widerspruch.

3. Wegen 1. ist jede Zusammenhangskomponente zusammenhängend; es gilt natürlich  $Z(x) \subset \overline{Z(x)}$  und wegen 2. ist  $\overline{Z(x)}$  zusammenhängend und daher gleich  $Z(x)$ . □

Das folgende Beispiel zeigt einen Raum mit einer Zusammenhangskomponente, die nicht offen ist.

**Beispiel 1.14.14.** Betrachte

$$X := \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\} \subset \mathbb{R}$$

mit der von  $\mathbb{R}$  induzierten Topologie. Dann sind die einelementigen Teilmengen  $\{\frac{1}{n}\}$  offen und abgeschlossen in  $X$  und daher Zusammenhangskomponenten von  $X$ . Die Zusammenhangskomponente  $\{0\}$  ist nach Satz 1.14.13.3 abgeschlossen, aber nicht offen. Denn jede Umgebung von 0 in der Unterraumtopologie enthält unendlich viele der Punkte  $1/n$ , die aber jeder in ihrer eigenen Zusammenhangskomponente liegen.

Wir schließen nun genau die Situation, die im Beispiel 1.14.14 beim Punkt 0 vorliegt, aus:

**Definition 1.14.15.** Ein topologischer Raum  $X$  heißt **lokal zusammenhängend**, falls für jeden Punkt  $x \in X$  und jede Umgebung  $U \in \mathcal{U}(x)$  eine zusammenhängende Umgebung  $V \in \mathcal{U}(x)$  enthält.

Mit anderen Worten: bei einem lokal-zusammenhängenden Raum bilden die zusammenhängenden Umgebungen Umgebungsbasen.

**Beispiel 1.14.16.** Vorsicht: Ein zusammenhängender Raum  $X$  ist nicht unbedingt lokal zusammenhängend.

Als Beispiel betrachte den “konvergierenden Besen”: sei  $Q_n := (\frac{1}{n}, 0) \in \mathbb{R}^2$ ,  $Q_0 := (0, 0)$  und  $P := (0, 1)$ . Setze  $X = \cup_{n \geq 0} \overline{Q_n P}$ . Jede der Mengen  $\overline{Q_n P}$  ist als homöomorphes Bild eines Intervalls zusammenhängend. Da sich alle Intervalle  $\overline{Q_n P}$  in  $P$  schneiden, ist  $X$  nach Korollar 1.14.7 zusammenhängend. Betrachte aber andererseits Umgebungen des Punktes  $(0, \frac{1}{2})$ . Jede dieser Umgebungen besteht aus unendlich vielen Intervallen und enthält keine zusammenhängende Umgebung.

**Satz 1.14.17.** *Der topologische Raum  $X$  sei lokal zusammenhängend. Dann ist jede Zusammenhangskomponente offen und abgeschlossen. Wählt man Repräsentanten  $(x_i)_{i \in I}$  für die Zusammenhangskomponenten, so ist als topologischer Raum*

$$X \cong \coprod_{i \in I} Z(x_i) .$$

*Beweis.* Nach Satz 1.14.13 sind die Zusammenhangskomponenten auch schon ohne die Annahme “lokal zusammenhängend” abgeschlossen. Sei  $y \in Z(x)$  beliebig. Sei  $V$  eine zusammenhängende Umgebung von  $y$ . Dann ist  $V \subset Z(x)$ . Damit enthält die Zusammenhangskomponente  $Z(x)$  eine Umgebung von  $y$  und ist somit offen. Die Behauptung folgt nun aus Bemerkung 1.11.5.  $\square$

## 1.15 Wegzusammenhang

**Definition 1.15.1.** Ein topologischer Raum  $X$  heißt **wegzusammenhängend**, wenn es für je zwei  $x, y \in X$  eine stetige Abbildung

$$w : [0, 1] \rightarrow X$$

gibt mit  $w(0) = x$  und  $w(1) = y$ . Eine solche Abbildung heißt **Weg**.

**Satz 1.15.2.** *Ist  $X$  wegzusammenhängend, so ist  $X$  zusammenhängend.*

*Beweis.* Wäre  $X$  nicht zusammenhängend, so schreibe  $X = X_1 \dot{\cup} X_2$  mit nicht-leeren disjunkten offenen Teilmengen  $X_1$  und  $X_2$ . Wähle  $x_1 \in X_1$  und  $x_2 \in X_2$  und einen Weg  $w$ , der  $x_1$  und  $x_2$  verbindet. Dann wäre

$$w^{-1}(X_1) \dot{\cup} w^{-1}(X_2)$$

eine disjunkte Zerlegung des nach Satz 1.14.4 zusammenhängenden Intervalls  $[0, 1]$  in nicht-leere offene Mengen, Widerspruch.  $\square$

**Satz 1.15.3.** *Die topologischen Räume  $\mathbb{R}^1$  und  $\mathbb{R}^2$  sind nicht homöomorph.*

*Beweis.* Angenommen  $f : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ist ein Homöomorphismus. Dann ist nach Satz 1.14.9  $\mathbb{R}^1 \setminus \{0\} \cong \mathbb{R}^2 \setminus \{f(0)\}$ .

$\mathbb{R}^1 \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$  ist nicht zusammenhängend, für einen Widerspruch werden wir zeigen, dass  $\mathbb{R}^2 \setminus \{f(0)\}$  zusammenhängend ist. Nach Satz 1.15.2 reicht es zu zeigen, dass  $\mathbb{R}^2 \setminus \{f(0)\}$  wegzusammenhängend ist.

Wir können beliebige  $x_1$  und  $x_2$  in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{f(0)\}$  mit einem Geradenabschnitt  $w(t) = x_1 + t(x_2 - x_1)$  verbinden, es sei denn  $f(0)$  liegt im Bild von  $w$ . Dann aber wählen wir irgendein  $z$  das nicht kollinear mit  $x_1$  und  $x_2$  ist und verbinden  $x_1$  mit  $z$  und  $z$  mit  $x_2$  durch Geradenabschnitte. Wir definieren den Weg von  $x_1$  nach  $x_2$  durch  $w(t) = x_1 + 2t(z - x_1)$ , wenn  $t \leq \frac{1}{2}$ , und  $w(t) = z + (1 - 2t)(x_2 - z)$ , wenn  $t \geq \frac{1}{2}$ .  $\square$

**Bemerkung 1.15.4.** Dieser Satz scheint offensichtlich, aber die Invarianz der Dimension war eine der wichtigen theoretischen Fragen in den Anfangsjahren der Topologie. Die Frage ist jedenfalls nicht trivial, wie man an der Existenz von stetigen Surjektionen  $[0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$  (!) sieht. Wir werden später sehen, dass  $\mathbb{R}^2$  nicht homöomorph zu  $\mathbb{R}^3$  ist. Für den allgemeine Beweis, dass  $\mathbb{R}^n$  nicht homöomorph zu  $\mathbb{R}^m$  ist, wenn  $n \neq m$ , müssen Sie auf einen Folgekurs warten.

Auf den Punkten eines topologischen Raumes definieren wir eine Relation **Wegzusammenhang** durch  $x \approx y$ , wenn es einen Weg  $w$  gibt mit  $w(0) = x$  und  $w(1) = y$ .

**Satz 1.15.5.** *Wegzusammenhang ist eine Äquivalenzrelation.*

*Beweis.* Der konstante Weg zeigt  $x \approx x$ . Aus  $x \approx y$  mit einem Weg  $w$  folgt mit  $\tilde{w}(t) = w(1-t)$ , dass auch  $y \approx x$ . Um die Transitivität der Relation zu zeigen definieren wir die Verkettung von zwei Wegen  $w$  und  $v$ : Gilt  $v(1) = w(0)$  dann definieren wir  $w * v(t) = v(2t)$  wenn  $t \leq \frac{1}{2}$  und  $w * v(t) = w(2t-1)$  wenn  $t \geq \frac{1}{2}$ .  $\square$

**Definition 1.15.6.** Wir nennen die Äquivalenzklasse von  $x \in X$  die **Wegkomponente** von  $x$ , geschrieben als  $W(x)$ . Die Menge aller Wegkomponenten von  $X$  bezeichnen wir auch als  $\pi_0(X)$ .

**Satz 1.15.7.** *Sei  $X$  ein topologischer Raum. Dann gilt*

1. *Für  $x \in X$  ist  $W(x) \subset Z(x)$ .*
2. *Eine Wegkomponente ist wegzusammenhängend.*
3. *Das Bild eines wegzusammenhängend Raumes ist wegzusammenhängend.*

*Beweis.*

1. Für  $x, y$  in der gleichen Wegkomponente finde einen Weg  $w$ , der  $x$  und  $y$  verbindet. Dann ist  $w([0, 1])$  eine zusammenhängende Teilmenge, die  $x, y$  enthält, so dass diese Punkte in der gleichen Zusammenhangskomponente liegen.
2. Ist klar wegen der Transitivität der Relation.
3. Sei  $f : X \rightarrow Y$  ein Homöomorphismus und  $x, y \in Y$ . Sei  $w$  ein Weg von  $f^{-1}(x)$  nach  $f^{-1}(y)$ , dann ist  $f \circ w$  ein Weg von  $x$  nach  $y$ .  $\square$

**Satz 1.15.8.** *Jede stetige Abbildung  $X \rightarrow Y$  induziert eine Funktion  $f_* : \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$ . Wenn  $f$  ein Homöomorphismus ist, dann ist  $f_*$  eine Bijektion.*

*Beweis.* Da Wegkomponenten wegzusammenhängend sind ist das Bild einer Wegkomponente in einer eindeutigen Wegkomponente enthalten, wir erhalten also eine wohldefinierte induzierte Funktion von  $\pi_0(X)$  nach  $\pi_0(Y)$  die  $W(x)$  nach  $W(f(x))$  schickt. Es ist klar, dass  $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$  gilt, da beide Funktionen durch  $W(x) \mapsto W(g(f(x)))$  repräsentiert werden

Da die Identität auf  $X$  die Identität auf  $\pi_0(X)$  induziert können wir folgern, dass für einen Homöomorphismus  $f : X \rightarrow Y$  mit Inversem  $g$  die Abbildungen  $f_*$  und  $g_*$  ebenfalls invers zueinander sind. Also sind  $\pi_0(X)$  und  $\pi_0(Y)$  gleichmächtig.  $\square$

Ein ähnlicher Beweis, zeigt dass die Anzahl der Zusammenhangskomponenten ebenso homöomorphie-invariant ist.

**Beispiel 1.15.9.** Eine Wegkomponente  $W(x)$  eines topologischen Raumes ist im allgemeinen weder abgeschlossen noch offen. Setze dazu

$$X_1 := \{(x, \sin \frac{1}{x}) \mid 0 < x \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2 \quad X_2 := \{(0, y) \mid -1 \leq y \leq 1\}$$

und  $X := X_1 \dot{\cup} X_2 \subset \mathbb{R}^2$  mit der von  $\mathbb{R}^2$  induzierten Topologie. Als homöomorphes Bild eines Intervalls in  $\mathbb{R}$  sind  $X_1$  und  $X_2$  wegzusammenhängend.

Wir werden zeigen, dass  $X_1$  und  $X_2$  die Wegkomponenten von  $X$  sind.

Zuerst stellen wir fest, dass  $X_1$  offen ist ( $X_1 = X \cup \{(x, y) \mid y > 0\}$ ). Aber  $X_1$  ist nicht abgeschlossen, denn alle Punkte des Geradensegments  $X_2$  sind Berührungspunkte von  $X_1$ , aber nicht in  $X_1$  enthalten,  $X_2 \subset \overline{X_1}$ .

Die Zusammenhangskomponente  $X_2$  ist als Komplement von  $X_1$  abgeschlossen, aber nicht offen, da jede Umgebung jedes Punktes von  $X_2$  einen Punkt der Zusammenhangskomponente  $X_1$  enthält.

Nehmen wir nun an, dass  $X_1$  und  $X_2$  Teil der gleichen Wegkomponente sind. Dann gibt es  $w : [0, 1] \rightarrow X$  mit  $w(0) = (0, 0)$  und  $w(1) = (\frac{1}{\pi}, 0)$ . Wir betrachten  $T = \{s \mid w([0, s]) \subset X_2\}$  und  $t = \sup(T)$ . Da  $w(0) \in X_1$ , ist  $T$  nicht leer, also existiert  $t$ . Wir stellen fest, dass  $t \in T$ , denn  $w^{-1}(X_2)$  ist abgeschlossen.

Wir versehen nun  $X$  mit der Euklidischen Unterraummetrik. Mithilfe der Stetigkeit von  $f$  wählen wir  $\delta$  so dass für  $|x-t| \leq \delta$  gilt  $d(f(x), f(t)) \leq \frac{1}{2}$ . Dann ist insbesondere der Abstand in der zweiten Koordinate  $< \frac{1}{2}$  und  $w([t, t + \delta])$  ist in der Untermenge  $X' = X \cap \{(x, y) \mid |y - \pi_2 \circ w(t)| \leq \frac{1}{2}\}$  enthalten.

$X'$  ist nicht zusammenhängend, da das Tal oder der Gipfel der Sinuswelle einen Abstand  $> \frac{1}{2}$  von  $\pi_2 \circ w(t)$  hat. Überdies ist  $X_2 \cap X'$  eine Wegkomponente von  $X'$ , denn für jedes  $(x, y) \in X'$  mit  $x > 0$  gibt es einen Tal oder Gipfel der Sinuswelle mit  $x' \in (0, x)$  und  $(x', \sin(\frac{1}{x'})) \notin X'$ . Dann zerlegen die Schnitte mit  $U_< = \{(x, y) \mid x < x'\}$  und  $U_> = \{(x, y) \mid x > x'\}$  die Menge  $X'$  in disjunkte offene Teilmengen und  $(x, y)$  kann nicht in der Zusammenhangskomponente von  $(0, 0)$  liegen.

Also gilt für alle  $t' \in [t, t + \delta)$  dass  $w(t') \in X_2$  liegt, was im Widerspruch dazu steht, dass  $t = \sup(T)$ . Wir folgern, dass  $X_1$  und  $X_2$  nicht in der gleichen Wegkomponente liegen.

Dies ist auch ein Beispiel für einen Raum der zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend ist.  $X$  ist zusammenhängend, da  $X \subset \overline{X_1}$ , vgl. Satz 1.14.13.

**Definition 1.15.10.** Ein topologischer Raum heißt **lokal wegzusammenhängend**, wenn für jeden Punkt  $x$  jede Umgebung  $U$  von  $x$  eine wegzusammenhängende Umgebung  $V$  von  $x$  enthält.

Mit anderen Worten: bei einem lokal wegzusammenhängenden Raum bilden die wegzusammenhängenden Umgebungen Umgebungsbasen. Aus Satz 1.15.2 folgt, dass lokal wegzusammenhängende Räume auch lokal zusammenhängend sind.

**Satz 1.15.11.** Sei  $X$  ein lokal wegzusammenhängender topologischer Raum. Dann gilt  $Z(x) = W(x)$  für alle  $x \in X$ . Die Wegkomponenten sind also die Zusammenhangskomponenten. Sie sind offen und abgeschlossen, und es gilt

mit einem Repräsentantensystem  $(x_i)_{i \in I}$  der Zusammenhangskomponenten als topologischer Raum

$$X = \coprod_{i \in I} W(x_i) = \coprod_{i \in I} Z(x_i) .$$

*Beweis.* Ist  $X$  lokal wegzusammenhängend, so ist  $X$  lokal zusammenhängend. Daher sind nach Satz 1.14.17 die Zusammenhangskomponenten offen und abgeschlossen. Nach Bemerkung 1.11.5 gilt

$$X = \coprod_{i \in I} Z(x_i) .$$

Als Menge gilt auch

$$X = \dot{\cup}_{i \in I} W(x_i) .$$

Die Wegkomponenten  $W(x)$  sind offen, weil jede Umgebung  $U \in \mathcal{U}(x)$  eine wegzusammenhängende Umgebung von  $x$  enthält. Nun gilt

$$W(x_i) = X \setminus \bigcup_{j \in I \setminus \{i\}} W(x_j)$$

so dass die Wegkomponente  $W(x_i)$  als Komplement offener Mengen auch abgeschlossen ist. Somit gilt auch als topologischer Raum nach Bemerkung 1.11.5

$$X = \coprod_{i \in I} W(x_i) .$$

Nach Satz 1.15.7 gilt immer  $W(x) \subset Z(x)$ . Angenommen, es wäre  $Z(x) \supsetneq W(x)$  für ein  $x \in X$ . Dann wäre  $Z(x) = (Z(x) \setminus W(x)) \dot{\cup} W(x)$ , im Widerspruch dazu, dass  $Z(x)$  zusammenhängend ist.  $\square$

**Korollar 1.15.12.** *Sei  $U$  eine zusammenhängende offene Menge in  $\mathbb{R}^n$ . Dann ist  $U$  wegzusammenhängend.*

*Beweis.* Da die offenen Kugeln in  $\mathbb{R}^n$  wegzusammenhängend sind, ist jede offene Menge in  $\mathbb{R}^n$  lokal wegzusammenhängend. Da  $U$  die einzige Zusammenhangskomponente ist, ist  $U$  wegen Satz 1.15.11 auch wegzusammenhängend.  $\square$

## 1.16 Mehr über Quotientenräume

Wir wenden uns noch ein paar nützlichen Beispielen von Quotientenräumen zu.

Das Argument aus Beispiel 1.12.3 lässt sich verallgemeinern:

**Satz 1.16.1.** *Seien  $X$  und  $Y$  topologische Räume und  $f : X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung. Wir betrachten auf dem Urbildraum  $X$  die Äquivalenzrelation  $x \sim_f y$  genau dann, wenn  $f(x) = f(y)$  und versehen  $X/\sim_f$  mit der Quotiententopologie. Das Bild  $f(X)$  versehen wir mit der Unterraumtopologie in  $Y$ . Wir zerlegen mit den kanonischen Abbildungen*

$$f : X \xrightarrow{\pi} X/\sim_f \xrightarrow{\bar{f}} f(X) \xrightarrow{j} Y .$$

*Dann ist die Abbildung  $\bar{f}$  stetig.*

*Beweis.* Nach der universellen Eigenschaft der Unterraumtopologie (Satz 1.6.1) folgt aus der Stetigkeit der Verkettung  $f = j \circ (\bar{f} \circ \pi)$ , dass  $\bar{f} \circ \pi$  stetig ist. Nach der universellen Eigenschaft der Quotiententopologie (Satz 1.12.2) folgt aus der Stetigkeit der Verkettung  $\bar{f} \circ \pi$  die Stetigkeit von  $\bar{f}$ .  $\square$

Da die Abbildung  $\bar{f}$  qua Konstruktion bijektiv ist, ist  $\bar{f}$  genau dann ein Homöomorphismus, wenn sie offen (oder wenn sie abgeschlossen) ist.

**Definition 1.16.2.** Es gelten die Bezeichnungen aus Satz 1.16.1.

1. Ist  $\bar{f}$  ein Homöomorphismus, so heißt  $\bar{f}$  **identifizierende Abbildung**.
2. Ist  $f : X \rightarrow Y$  stetig und surjektiv und  $\bar{f}$  ein Homöomorphismus, so nennt man die Topologie von  $Y$  **Identifizierungstopologie** bezüglich  $f$ . In diesem Fall vereinfacht sich die Zerlegung zu

$$f : X \xrightarrow{\pi} X/\sim_f \xrightarrow{\bar{f}} Y .$$

Es folgt sofort:

**Korollar 1.16.3.** *Ist  $f : X \rightarrow Y$  stetig, surjektiv und offen, so trägt  $Y$  die Identifizierungstopologie bezüglich  $f$ .*

**Beispiel 1.16.4.** Betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{S}^n \\ x &\mapsto \frac{x}{\|x\|} \end{aligned}$$

die jedem vom Nullvektor verschiedenen Vektor den zugehörigen Einheitsvektor zuordnet. Sie ist stetig, surjektiv und offen. Sie induziert auf  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  die Äquivalenzrelation  $x \sim_f y$  genau dann, wenn es  $\lambda > 0$  gibt mit  $x = \lambda y$ . Die Identifizierungstopologie auf  $\mathbb{S}^n$  stimmt also mit der Unterraumtopologie überein.

Wir wenden uns noch einem wichtigen Beispiel von Quotientenräumen zu. Wir definieren die Verklebung entlang von Abbildungen.

**Definition 1.16.5.** Seien  $X, Y$  topologische Räume. Sei  $A \subset X$  abgeschlossen und  $f : A \rightarrow Y$  eine Abbildung. Wir betrachten die folgende Äquivalenzrelation auf  $X \amalg Y$ :

$$z_1 \sim_f z_2 \quad \text{genau dann, wenn} \quad \begin{cases} z_1 = z_2 & \text{für beliebige } z_1, z_2 \in X \cup Y . \\ z_1, z_2 \in A \text{ und } f(z_1) = f(z_2) \\ z_1 \in A, z_2 \in f(A) \text{ und } f(z_1) = z_2 \\ z_1 \in f(A), z_2 \in A \text{ und } z_1 = f(z_2) \end{cases}$$

Der Quotientenraum  $X \amalg Y / \sim_f$  wird mit  $X \cup_f Y$  bezeichnet und heißt der durch **Zusammenkleben** von  $X$  und  $Y$  mittels  $f$  entstandene Raum.

Es werden also die Punkte in  $f(A) \subset Y$  mit ihren Urbildern in  $A$  identifiziert.

**Beispiele 1.16.6.**



1. Seien  $X = Y = [0, 1]$  und  $A = \{\frac{1}{2}\}$ . Mit  $f_1 = \text{id}_A$  erhalten wir durch Zusammenkleben zwei sich in einem Punkt berührende Intervalle (ein "X")

Für  $f_2 : \frac{1}{2} \mapsto 0$  erhalten wir ein "T".

Man sieht durch Entfernen des Berührungspunktes und zählen von Wegkomponenten, dass diese beiden Räume nicht homöomorph sind. Die Abbildung  $f$  ist also wesentlich, auch wenn sie manchmal in der Notation unterdrückt wird.

2. Seien  $X = Y = [0, 1]$  und  $A = \{0, 1\}$ . Mit  $f = \text{id}_A$  erhalten wir durch Zusammenkleben eine Kreislinie
3. Seien  $X = Y = \mathbb{D}^2$  abgeschlossene Kreisscheiben,  $A \subset X$  der Rand von  $X$  und  $f = \text{id}_{S^1}$ . Dann ist

$$\mathbb{S}^2 \cong \mathbb{D}^2 \cup_{S^1} \mathbb{D}^2 .$$

Hierbei schreiben wir als Subskript die Teilmenge  $A = S^1$  und notieren nicht die Abbildung.

**Definition 1.16.7.** Sei  $\mathbb{D}^n \subset \mathbb{R}^n$  die abgeschlossene Einheitskugel,  $e^n = \overset{\circ}{\mathbb{D}}^n$  und  $\mathbb{S}^{n-1} = \partial\mathbb{D}^n = \mathbb{D}^n \setminus \overset{\circ}{\mathbb{D}}^n$ , jeweils versehen mit der Unterraumtopologie der euklidischen Topologie auf  $\mathbb{R}^n$ . (Es gilt  $\mathbb{D}^0 = e^0 = \{*\}$ .)

1. Die zu diesen Räumen homöomorphen Räume heißen  $n$ -dimensionaler **Ball**,  $n$ -dimensionale **Zelle** und  $(n - 1)$ -dimensionale **Sphäre**.
2. Sei  $f : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow X$  eine Abbildung in einen topologischen Raum. Man sagt,  $X \cup_f \mathbb{D}^n$  sei durch **Ankleben** einer  $n$ -Zelle mittels  $f$  entstanden.

**Beispiele 1.16.8.**

1. Die Sphäre erhält man durch Ankleben einer 2-Zelle an die Kreisscheibe  $\mathbb{D}$  entlang des Randes, vgl. Beispiel 1.16.6.3.
2. Klebt man an den Rand eines Möbiusschen Bandes eine 2-Zelle, so erhält man die reelle projektive Ebene. Das lässt sich anhand eines Bildes verstehen.

Man kann natürlich auch mehrere disjunkte  $n$ -Zellen durch eine Familie stetiger Abbildungen gleichzeitig ankleben.

**Definition 1.16.9.** Ein  $n$ -dimensionaler **CW-Komplex** ist induktiv definiert wie folgt.

1. Ein 0-dimensionaler CW-Komplex ist eine Menge von Punkten, versehen mit der diskreten Topologie.
2. Ein  $n$ -dimensionaler CW-Komplex  $X_n$  ist ein Raum der Form

$$X_n = X_k \cup_f D_I^n,$$

wobei  $X_k$  ein  $k$ -dimensionaler CW-Komplex mit  $k < n$  ist,  $D_I^n = \coprod_{i \in I} \mathbb{D}^n$  eine Summe von  $n$ -dimensionalen Bällen und  $f : \coprod_{i \in I} \partial\mathbb{D}_i^n \rightarrow X_k$  eine stetige Abbildung.

Ein CW-Komplex heißt endlich, wenn die Gesamtzahl der Zellen endlich sei.

Es gilt  $X = \dot{\cup}_{k \leq n} \amalg_{I_k} e^k$ .  $X$  hat also eine disjunkte Zerlegung in Zellen und wird auch **Zellkomplex** genannt.

Wir werden später auf allgemeine CW-Komplexe zurückkommen.

**Beispiel 1.16.10.** Die Sphäre  $\mathbb{S}^2$  ist zu einem 2-dimensionalen CW-Komplex homöomorph. Man kann einfach eine 2-Zelle an einen Punkt kleben, d.h.  $f : \partial D^2 \rightarrow *$  ist die konstante Funktion.

Alternativ ist  $\mathbb{S}^0$  diskret mit zwei Elementen. Wir erhalten  $\mathbb{S}^1$  indem wir zwei 1-Zellen jeweils mit ihren Endpunkten an die beiden Elemente von  $\mathbb{S}^0$  kleben. Dann kleben wir zwei 2-Zellen als Hemisphären an  $\mathbb{S}^1$  indem wir ihren Rand mit  $\mathbb{S}^1$  identifizieren und erhalten so  $\mathbb{S}^2$ .

Induktiv erhalten wir  $\mathbb{S}^n$  als CW-Komplex mit 2 Zellen in jeder Dimension  $\leq n$ .

## 1.17 Kompaktheit

Aus der Analysis wissen Sie, dass das abgeschlossene Intervall viele gute Eigenschaften hat, die im offenen Intervall oder in  $\mathbb{R}$  nicht gelten. Folgen haben konvergente Teilfolgen, stetige Funktionen sind beschränkt und erreichen ihre Extremwerte. Der Grund ist eine gewisse Endlichkeit des abgeschlossenen Intervalls, nichts geht in die Unendlichkeit.

Die Verallgemeinerung dieser Eigenschaften ist eines der wichtigsten Konzepte dieses Kurses.

**Definition 1.17.1.** Eine Familie  $\mathcal{U}$  von Teilmengen einer Menge  $X$  heißt **Überdeckung** von  $X$ , wenn  $X = \cup_{U \in \mathcal{U}} U$  gilt.

Eine Überdeckung eines topologischen Raumes  $X$  heißt **offen**, wenn jedes  $U \in \mathcal{U}$  offen in  $X$  ist.

Eine **Teilüberdeckung** einer Überdeckung  $\mathcal{U}$  von  $X$  ist eine Teilfamilie  $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ , die ebenfalls eine Überdeckung ist.

**Definition 1.17.2.** Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum. Wir sagen, dass  $X$  **kompakt**, ist, wenn jede offene Überdeckung von  $X$  eine endliche Teilüberdeckung hat.

**Satz 1.17.3.** *Ein topologischer Raum  $(X, \mathcal{T})$  ist genau dann kompakt, wenn es für jede Familie  $A_i$ ,  $i \in I$  von abgeschlossene Teilmengen mit  $\bigcap_{i \in I} A_i = \emptyset$ , endlich viele Indizes  $i_1, \dots, i_n \in I$  gibt, so dass*

$$A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n} = \emptyset.$$

*Beweis.* Folgt aus der Definition. □

In mancher Literatur heißen solche Räume auch nur **quasikompakt** und man fordert zusätzlich Hausdorffsch für Kompaktheit.

Unser erstes Beispiel ist wichtig genug, um es als Satz zu formulieren:

**Satz 1.17.4.** *Das abgeschlossene Intervall  $[0, 1]$  ist kompakt.*

*Beweis.* Sei  $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in J}$  eine offene Überdeckung von  $[0, 1]$ . Wir betrachten  $\mathcal{E}$  die Menge der endlichen Teilmengen von  $J$ . Setze

$$T := \{t \in [0, 1] \mid \text{es gibt } E \in \mathcal{E}, \text{ so dass } \cup_{e \in E} U_e \supset [0, t]\}$$

$T$  enthält also die  $t \in [0, 1]$ , für die sich das Teilintervall  $[0, t]$  endlich überdecken lässt.

Es gilt  $T \neq \emptyset$ , denn  $0 \in T$ , weil  $0 \in U_i$  für ein  $i \in J$ . Außerdem ist  $T$  nach oben beschränkt als Teilmenge von  $[0, 1]$ . Wir setzen also  $s := \sup T$ .

Ist  $t_2 \in T$  und  $0 \leq t_1 < t_2$ , so gilt  $[0, t_1] \subset [0, t_2] \subset \cup_{i \in E} U_i$  und somit ist  $t_1 \in T$ . Also ist  $T$  ein (halboffenes oder abgeschlossenes) Intervall.

Angenommen  $T = [0, s]$ . Wenn  $s = 1$  ist, dann ist  $[0, 1]$  kompakt. Ist aber  $s < 1$  dann ist  $s \in U_{i_1}$  für einen Index  $i_1$  und es existiert  $t > s$  mit  $[s, t] \subset U_{i_1}$ . Damit ist aber auch  $[0, t] \subset T$ , im Widerspruch dazu, dass  $s$  das Supremum von  $T$  ist.

Sei also  $T$  von der Form  $[0, s)$  mit  $0 < s \leq 1$ . Dann ist  $s \in U_{i_0}$  für einen Index  $i_0$ . Da  $U_{i_0}$  offen ist, gibt es  $t < s$  mit  $[t, s] \subset U_{i_0}$ . Weil  $s = \sup T$ , ist  $t \in T$ . Damit hat aber  $[0, s] = [0, t] \cup [t, s]$  eine endliche offene Überdeckung bestehend aus  $U_{i_0}$  und einer endlichen offenen Überdeckung von  $[0, t]$ . Das ist ein Widerspruch zur Annahme  $s \notin T$ .  $\square$

**Satz 1.17.5.** Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein kompakter topologischer Raum. Dann ist jeder abgeschlossene Teilraum von  $X$  kompakt.

*Beweis.* Sei  $A \subset X$  abgeschlossen. Zu einer offenen Überdeckung  $(U_i)_{i \in I}$  von  $A$  finde in  $X$  offene Mengen  $V_i \subset X$  mit  $U_i = V_i \cap A$ . Dann ist  $(X \setminus A) \cup (\cup_{i \in I} V_i)$  eine offene Überdeckung von  $X$ , in der wir eine endliche Teilüberdeckung  $\cup_{i \in E} V_i \cup (X \setminus A)$  von  $X$  finden können. Dann ist  $\cup_{i \in E} U_i$  eine endliche Teilüberdeckung von  $A$ .  $\square$

**Satz 1.17.6.** Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein kompakter topologischer Raum. Ist  $f : X \rightarrow Y$  stetig und surjektiv, so ist  $Y$  kompakt. Insbesondere ist das Bild eines kompakten Raumes immer kompakt.

*Beweis.* Ist  $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$  eine offene Überdeckung des Bildes  $Y$ , so ist  $(f^{-1}(U_i))_{i \in I}$  wegen der Stetigkeit von  $f$  eine offene Überdeckung des Urbildes  $X$ . Weil  $X$  kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung  $(f^{-1}(U_i))_{i \in E}$  mit  $E \subset I$  endlich. Da  $f$  surjektiv ist, ist  $(U_i)_{i \in E}$  eine endliche Überdeckung von  $Y$ .  $\square$

Vorsicht: ist  $K \subset Y$  kompakt, so ist das Urbild  $f^{-1}(K)$  nicht unbedingt kompakt. Als Gegenbeispiel betrachte eine konstante Abbildung  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Beispiele 1.17.7.**

1. Ein diskreter topologischer Raum  $X$  ist genau dann kompakt, wenn  $X$  endlich ist.
2. Ein endlicher topologischer Raum  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  ist immer kompakt, da alle Überdeckungen endlich sind.
3.  $\mathbb{R}^n$  ist nicht kompakt: die offene Überdeckung  $(B_1(x))_{x \in \mathbb{R}^n}$  durch Einheitskugeln hat keine endliche Teilüberdeckung.

4. Die Menge  $X := \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$  ist nicht kompakt: zum Beispiel hat die Überdeckung  $B_{\frac{1}{2n(n+1)}}(\frac{1}{n})$  keine endliche Teilüberdeckung. Aber die Menge  $X' := X \cup \{0\}$  ist kompakt: in jeder Umgebung von 0 liegen fast alle Punkte  $\frac{1}{n}$ , d.h. wir brauchen für eine Überdeckung nur noch endlich viele andere offene Mengen.

Im nächsten Lemma verwenden wir den Begriff der Umgebung einer Teilmenge  $A$ . Dies ist einfach eine Obermenge  $A \subset B$  so dass es eine offene Menge  $U$  mit  $A \subset U \subset B$  gibt.

**Lemma 1.17.8.** *Sei  $X$  topologischer Raum,  $L \subset X$  und  $K \subset X$  kompakt und  $L \cap K = \emptyset$ . Kann man jeden einzelnen Punkt des Kompaktums  $K$  und die ganze Menge  $L$  durch offene Umgebungen trennen, dann kann man auch das gesamte Kompaktum  $K$  und ganz  $L$  durch offene Umgebungen trennen.*

*Beweis.* Für jeden Punkt  $x \in K$  wähle eine offene Umgebung  $U_x$  von  $x$  und eine offene Umgebung  $V_x \supset L$  von  $L$ , die disjunkt sind,  $K_x \cap L_x = \emptyset$ . In der Überdeckung  $(U_x)_{x \in K}$  des kompakten Raums  $K$  wähle eine endliche Teilüberdeckung,

$$K \subset U := U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n}.$$

Dann ist der *endliche* Durchschnitt  $V := V_{x_1} \cap \dots \cap V_{x_n}$  eine offene Umgebung von  $L$ , die zur offenen Umgebung  $U$  von  $K$  disjunkt ist.  $\square$

**Satz 1.17.9.** *Sei  $K \subset X$  und  $X$  Hausdorffsch. Ist  $K$  kompakt, so ist  $K$  in  $X$  abgeschlossen.*

*Beweis.* Sei  $y \in X \setminus K$ . Setze  $L = \{y\}$  und finde, da  $X$  Hausdorffsch ist, für jeden Punkt  $x \in K$  offene Umgebungen, die  $x$  und  $y$  trennen. Nach Lemma 1.17.8 gibt es dann eine offene Umgebung von  $y$ , die die ganze Menge  $K$  nicht trifft. Also ist  $X \setminus K$  offen und  $K$  somit abgeschlossen.  $\square$

Der nächste Satz ist bemerkenswert.

**Satz 1.17.10.** *Sei  $f : X \rightarrow Y$  stetig und bijektiv. Ist der Urbildraum  $X$  kompakt und der Bildraum  $Y$  Hausdorffsch, so ist  $f$  ein Homöomorphismus.*

*Ist  $f : X \rightarrow Y$  stetig und injektiv mit  $X$  kompakt und der  $Y$  Hausdorffsch, dann ist  $f$  eine Einbettung.*

*Beweis.* Nach Satz 1.5.8 müssen wir zeigen, dass  $f$  abgeschlossen ist. Ist  $A \subset X$  abgeschlossen, so ist  $A$  nach Satz 1.17.5 kompakt. Nach Satz 1.17.6 ist  $f(A) \subset Y$  kompakt. Nach Satz 1.17.9 folgt aus der Tatsache, dass  $Y$  Hausdorffsch ist, dass  $f(A)$  abgeschlossen ist. Die Abbildung  $f$  ist also abgeschlossen.  $\square$

Satz 1.17.10 erleichtert oft die Konstruktion von Homöomorphismen.

**Beispiel 1.17.11.** Wir vergleichen zum Beispiel das Quadrat mit parallel identifizierten Seiten  $X = [0, 1] \times [0, 1] / \sim$  mit  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  (dies sind zwei Beschreibungen des Torus, sollten also äquivalent sein). Wir definieren  $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  durch die beiden Projektionen. Also ist  $f$  stetig und da es die Ränder parallel identifiziert, gibt es eine Faktorisierung mit  $\bar{f} : X \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ . Aufgrund der Eigenschaften der Quotiententopologie ist  $\bar{f}$  stetig. Man sieht leicht, dass  $\bar{f}$  bijektiv ist. Da der Urbildraum als Bild des Quadrats kompakt ist und der Bildraum Hausdorffsch ist, muss  $\bar{f}$  ein Homöomorphismus sein.

Wir erreichen nun, nach etlichen Wochen, das erste tiefe Theorem dieses Kurses. Bisher lag der Inhalt dieses Kurses vor allem in Definitionen und Beispielen, die meisten Beweise waren kurz und folgten auf recht natürliche Art aus den Definitionen.

Der Satz von Tychonoff (zuerst in allgemeiner Form bewiesen von Čech) wird uns dagegen einiges an Arbeit abverlangen. Die Mühe lohnt sich aber, dieser Satz ist einer der wichtigsten Sätze der mengentheoretischen Topologie. (Anwendungen finden sich insbesondere in der Analysis, z.B. der Satz von Arzela-Ascoli.)

**Satz 1.17.12** (Satz von Tychonoff). *Ein Produkt  $X := \prod_{i \in I} X_i$  ist genau dann kompakt, wenn jeder topologische Raum  $X_i$  kompakt ist.*

Man beachte, dass hier keine Endlichkeitsannahmen für die Indexmenge  $I$  gemacht werden. Der Beweis ist deutlich einfacher wenn wir annehmen, dass  $I$  endlich ist.

Aus der Analysis wissen Sie vielleicht, dass sich Folgenkompaktheit für ein abzählbares Produkt mit einer Idee aber ohne allzu großen Aufwand beweisen lässt. Es scheint unmöglich, diesen Beweis zu verallgemeinern, denn er hängt entscheidend von der Verwendung von Folgenkompaktheit und von der Abzählbarkeit der Indexmenge ab.

Wir werden diese Probleme im nächsten Abschnitt durch Einführung einer neuen Idee von Konvergenz überwinden, um dann im übernächsten Abschnitt den Beweis vom Satz von Tychonoff nachzureichen.

Für das nächste Korollar brauchen wir nur endliche Indexmengen.

**Korollar 1.17.13** (Heine-Borel). *Eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.*

*Beweis.* Ist  $K \subset \mathbb{R}^n$  kompakt, so ist  $K$  nach Satz 1.17.9 abgeschlossen, weil  $\mathbb{R}^n$  als metrischer Raum nach Satz 1.13.2 Hausdorffsch ist. Die offene Überdeckung  $(B_n(0))_{n \in \mathbb{N}}$  durch Kugeln wachsenden Radius hat eine endliche Teilüberdeckung, weshalb  $K$  auch beschränkt ist.

Sei umgekehrt  $K$  abgeschlossen und beschränkt. Weil  $K$  beschränkt ist, existiert  $a \in \mathbb{R}$  mit  $K \subset [-a, a]^n$ . Der Würfel  $[-a, a]^n$  ist wegen des Satzes von Tychonoff 1.17.12 und Beispiel 1.17.4 kompakt. Wegen Satz 1.17.5 ist  $K$  als abgeschlossene Teilmenge des kompakten Würfels  $[-a, a]^n$  kompakt.  $\square$

**Bemerkung 1.17.14.** Aus der Analysis kennen Sie Folgenkompaktheit und haben gezeigt, dass  $K \subset \mathbb{R}^n$  genau dann folgenkompakt ist, wenn  $K$  beschränkt und abgeschlossen ist, also nach Satz 1.17.12 genau dann wenn  $K$  kompakt ist. Dies gilt nicht in allgemeinen topologischen Räumen.

**Korollar 1.17.15.** *Ist  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $X$  kompakt, so nimmt  $f$  sein Maximum und Minimum an.*

*Beweis.* Nach Satz 1.17.6 ist  $f(X)$  kompakt und damit nach Satz 1.17.13 abgeschlossen und beschränkt.  $\square$

## 1.18 Filter

Wir formalisieren die Eigenschaften der Menge  $\mathcal{U}(x)$  aller Umgebungen eines Punktes  $x \in X$  in einem topologischen Raum  $X$  und verallgemeinern gleichzeitig den Folgenbegriff.

**Definition 1.18.1.** Ein **Filter**  $F$  auf einer Menge  $X$  ist ein System von Teilmengen von  $X$  mit den folgenden Eigenschaften:

1.  $X \in F$ , aber  $\emptyset \notin F$ .
2. Abgeschlossenheit unter endlichen Schnitten: aus  $A, B \in F$  folgt  $A \cap B \in F$ .
3. Abgeschlossenheit unter Obermengen: aus  $B \in F$  und  $B \subset C$  folgt  $C \in F$ .

Die Anschauung ist, dass ein Filter aus allen Mengen besteht, die hängen bleiben. (Er ist also der Filterkuchen, nicht das Filtrat.)

**Definition 1.18.2.** Ein nicht-leeres System  $\mathcal{B}$  von Teilmengen von  $X$  heißt **Filterbasis** auf  $X$ , falls

1. der Durchschnitt zweier Mengen aus  $\mathcal{B}$  eine Menge aus  $\mathcal{B}$  enthält,
2.  $\emptyset \notin \mathcal{B}$  gilt.

### Beispiele 1.18.3.

1. Sei  $X$  ein topologischer Raum; die Menge der Umgebungen  $\mathcal{U}(x)$  eines Punktes  $x \in X$  bildet einen Filter, den **Umgebungsfilter** von  $x$ .
2. Sei  $\mathcal{B}$  eine Filterbasis auf einer Menge  $X$ . Dann ist das System von Obermengen von Mengen in  $\mathcal{B}$

$$\langle \mathcal{B} \rangle = \{Y \subset X \mid \text{es gibt } B \in \mathcal{B} \text{ mit } B \subset Y\}$$

ein Filter, der von  $\mathcal{B}$  erzeugte Filter.

Ist  $F$  ein Filter und  $\mathcal{B} \subset F$  eine Filterbasis, so heißt  $\mathcal{B}$  eine Filterbasis für  $F$ , falls  $\langle \mathcal{B} \rangle = F$  gilt, also  $F$  der von der Filterbasis  $\mathcal{B}$  erzeugte Filter ist.

Das ist genau dann der Fall, wenn es für jedes  $Y \in F$  ein  $B \in \mathcal{B}$  gibt mit  $B \subset Y$ . Denn  $\langle \mathcal{B} \rangle \subset F$  folgt aus  $\mathcal{B} \subset F$ ; die andere Inklusion aus der Annahme.

3. Für jede Menge  $X$  ist  $F = \{X\}$  ein Filter. Für jedes  $x \in X$  bildet  $F_x := \{A \subset X \mid x \in A\}$  einen Filter.
4. Als weiteres Beispiel, das das Beispiel in 3. verallgemeinert, wähle  $A \subset X$  eine nicht-leere Teilmenge einer Menge  $X$ .  $\mathcal{B} := \{A\}$  ist eine Filterbasis und erzeugt den Filter, der alle Obermengen von  $A$  enthält.
5. Sei  $(x_n)$  eine Folge mit Werten in einer Menge  $X$ . Dann ist das System der Mengen  $B_k := \{x_i\}_{i \geq k}$  mit  $k \in \mathbb{N}$ , nämlich der Endstücke der Folge, eine Filterbasis auf  $X$ .

6. Ist  $F$  ein Filter auf einer Menge  $X$  und  $f : X \rightarrow Y$  eine beliebige Abbildung, so ist

$$\mathcal{B}_{f(F)} := \{f(A) \mid A \in F\}$$

eine Filterbasis für den **Bildfilter**  $f(F)$  des Filters  $F$  unter der Abbildung  $f$ . Man beachte, die Notation,  $f(F)$  ist nicht die Menge aller Bilder von Elementen von  $F$ .

**Definition 1.18.4.** Seien  $F_1$  und  $F_2$  Filter auf einer Menge.  $F_1$  heißt **feiner** als  $F_2$  und  $F_2$  heißt **größer** als  $F_1$ , falls  $F_2 \subset F_1$  gilt.

Denn in einem feineren Filter “bleibt mehr hängen“. (Der Filter in dieser Analogie besteht aus den Mengen, die hängen bleiben.)

**Beispiel 1.18.5.** Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $x \in X$ . Der Umgebungsfiler  $\mathcal{U}(x)$  von  $x$  ist im Allgemeinen größer als der Filter  $F_x$  aus Beispiel 1.18.3.1. Der Filter  $F = \{X\}$  auf einer Menge  $X$  ist der grösste Filter auf  $X$ .

**Definition 1.18.6.** Ein Filter  $F$  auf einer Menge  $X$  heißt **Ultrafilter**, wenn es keinen echt feineren Filter auf  $X$  gibt.

**Beispiel 1.18.7.** Der Filter  $F_x$  aus Beispiel 1.18.3.3 ist für jedes  $x \in X$  ein Ultrafilter.

Angenommen,  $F$  ist ein Filter, der feiner als der Filter  $F_x$  ist,  $F_x \subsetneq F$ . Dann existiert  $Y \in F \setminus F_x$ . Das heißt aber nach Definition von  $F_x$ , dass  $x \notin Y$ . Andererseits ist  $\{x\} \in F_x \subset F$ . Damit muss der Schnitt  $\{x\} \cap Y$  im Filter  $F$  liegen, aber der Schnitt ist leer. Ein Filter darf aber nicht die leere Menge enthalten.

Das nächste sehr nützliche Lemma leiten wir vom Zornschen Lemma und damit vom Auswahlaxiom ab. Das Ultrafilterlemma ist aber nicht äquivalent zum Auswahlaxiom

**Lemma 1.18.8** (Ultrafilterlemma). *Jeder Filter ist in einem Ultrafilter enthalten.*

*Beweis.* Sei  $\mathcal{F}$  die Menge aller Filter auf  $X$ , die feiner sind als ein gegebener Filter  $F_0$ . Die Menge  $\mathcal{F}$  wird durch Inklusion partiell geordnet. Ist  $\mathcal{F}_0$  eine nicht-leere total geordnete Teilmenge von  $\mathcal{F}$ , so ist  $\cup_{F \in \mathcal{F}_0} F$  ein Filter und eine obere Schranke von  $\mathcal{F}_0$ . Nach dem Zornschen Lemma, siehe Anhang A.1, gibt es ein maximales Element, das per Definition ein Ultrafilter ist  $\square$

Zum Beispiel ist für  $\emptyset \neq A \subset X$  nach Beispiel 1.18.3.4 das System von Teilmengen  $F_A = \{Y \subset X \mid A \subset Y\}$  ein Filter. Ist  $a \in A$ , so ist der Filter  $F_a = \{Z \subset X \mid a \in Z\}$  aus Beispiel 1.18.3.3 nach Beispiel 1.18.7 ein Ultrafilter. Er enthält den Filter  $F_A$ . Dies zeigt auch, dass der Ultrafilter im Allgemeinen nicht eindeutig durch den Filter bestimmt ist (wie üblich bei maximalen Elementen, die man mit dem Zornschen Lemma findet).

**Satz 1.18.9.** *Ein Filter  $F$  auf einer Menge  $X$  ist genau dann ein Ultrafilter, wenn für jede Teilmenge  $A \subset X$  entweder  $A \in F$  oder  $X \setminus A \in F$  gilt.*

*Beweis.* Sei  $F$  ein Ultrafilter und  $A \subset X$  eine beliebige Teilmenge. Betrachte nun  $Y_0 \in F$ . Angenommen  $Y_0 \cap X \setminus A = \emptyset$ , dann gilt  $Y_0 \subset A$ . Dann gilt aber für jedes  $Y \in F$ , dass  $Y \cap A \neq \emptyset$ , denn sonst ist  $Y \subset X \setminus A$  und  $Y_0 \cap Y = \emptyset$ .

Also schneiden entweder alle  $Y \in F$  die Menge  $A$ , oder alle  $Y \in F$  schneiden  $X \setminus A$ .

Wir nehmen an, dass für alle  $Y \in F$  gilt  $Y \cap A \neq \emptyset$ . Dann ist

$$\mathcal{B} := \{Y \cap A \mid Y \in F\}$$

eine Filterbasis und der von  $\mathcal{B}$  erzeugte Filter  $\langle \mathcal{B} \rangle$  feiner als  $F$ . Da  $F$  ein Ultrafilter ist, gilt  $\langle \mathcal{B} \rangle = F$ . Offenbar ist aber  $A \in \langle \mathcal{B} \rangle$  wegen  $X \cap A = A$ .

Für alle Teilmengen  $A \subset X$  sei nun entweder  $A \in F$  oder  $X \setminus A \in F$ . Sei nun der Filter  $G$  echt feiner als  $F$ . Dann gibt es  $Y \in G$  mit  $Y \notin F$ . Wegen der Annahme ist  $X \setminus Y \in F$ . Da  $G$  feiner als  $F$  ist, ist auch  $X \setminus Y \in G$ . Die disjunkten Mengen  $Y$  und  $X \setminus Y$  können aber nicht gleichzeitig Elemente eines Filters sein, Widerspruch.  $\square$

### Definition 1.18.10.

1. Ein Filter  $F$  auf einem topologischen Raum  $X$  **konvergiert gegen**  $x \in X$ , in Zeichen  $F \rightarrow x$ , falls  $\mathcal{U}(x) \subset F$  gilt, also falls der Filter  $F$  feiner als der Umgebungsfilter  $\mathcal{U}(x)$  von  $x$  ist,  $\mathcal{U}(x) \subset F$ .
2. Ein Punkt  $x \in X$  heißt **Berührungspunkt** eines Filters  $F$ , falls für alle  $Y \in F$  und alle  $U \in \mathcal{U}(x)$  gilt  $Y \cap U \neq \emptyset$ . (Jede Menge im Filter trifft jede Umgebung.)

### Beispiele 1.18.11.

1. Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Folge in einem topologischen Raum  $X$  und  $F$  der von  $(x_n)$  erzeugte Filter mit der Basis aus Mengen von Endfolgen  $B_k := \{x_i\}_{i \geq k}$  wie in Beispiel 1.18.3.5. Dann ist  $x \in X$  genau dann Berührungspunkt der Folge, wenn  $x$  Berührungspunkt des Filters  $F$  ist.

Denn ein Punkt  $x \in X$  ist nach Definition 1.7.4 genau dann Berührungspunkt der Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , wenn jede Umgebung  $U \in \mathcal{U}(x)$  unendlich viele Glieder der Folge enthält. Genau dann ist aber  $B_n \cap U \neq \emptyset$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

2. In der gleichen Situation ist  $x \in X$  genau dann Grenzwert der Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , wenn der Filter  $F$  gegen  $x$  konvergiert.

Denn gilt  $x_n \rightarrow x$ , so gibt es für jede Umgebung  $U \in \mathcal{U}(x)$  ein  $N = N(U)$  mit  $x_n \in U$  für  $n \geq N$ . Dann ist aber  $B_n \subset U$  für alle  $n \geq N$  und somit  $U \in F$ .

Umgekehrt gelte  $\mathcal{U}(x) \subset F$ . Gegeben eine Umgebung  $U \in \mathcal{U}(x)$ , finde  $N_0 \in \mathbb{N}$  mit  $B_{N_0} \subset U$ ; das heißt aber,  $x_n \in U$  für alle  $n \geq N_0$ .

**Satz 1.18.12.** Die Menge aller Berührungspunkte eines Filters  $F$  ist  $\bigcap_{Y \in F} \overline{Y}$ .

*Beweis.* Es gilt  $x \in \bigcap_{Y \in F} \overline{Y}$  genau dann, wenn für alle  $Y \in F$  gilt  $x \in \overline{Y}$ , und das ist genau dann der Fall, wenn für alle  $Y \in F$  und alle  $U \in \mathcal{U}(x)$  gilt  $Y \cap U \neq \emptyset$ .  $\square$



**Satz 1.18.13.** *Seien  $X, Y$  topologische Räume. Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  ist genau dann stetig in  $x \in X$ , wenn das Bild jeden Filters  $F$  auf  $X$ , der gegen  $x$  konvergiert, gegen  $f(x)$  konvergiert.*

*Beweis.* Das Bild jeden Filters  $F$  auf  $X$ , der gegen  $x$  konvergiert, konvergiere gegen  $f(x)$ . Wähle als Filter den Umgebungsfilter von  $x$  selbst,  $F = \mathcal{U}(x)$ . Dann konvergiert  $f(\mathcal{U}(x)) \rightarrow f(x)$ , also gilt  $\mathcal{U}(f(x)) \subset f(\mathcal{U}(x))$ . Für jede Umgebung  $V \in \mathcal{U}(f(x))$  können wir also  $U \in \mathcal{U}(x)$  finden mit  $f(U) \subset V$ . Das heißt aber nach Definition 1.4.5, dass die Abbildung  $f$  im Punkt  $x \in X$  stetig ist.

Sei umgekehrt  $f$  stetig und gelte für einen Filter auf  $X$ , dass  $F \rightarrow x$ . Für jede Umgebung  $V \in \mathcal{U}(f(x))$  des Bildes  $f(x)$  gibt es wegen der Stetigkeit von  $f$  eine Umgebung  $U \in \mathcal{U}(x)$  mit  $f(U) \subset V$ . Wegen  $F \rightarrow x$  gilt  $U \in \mathcal{U} \subset F$  und somit  $f(U) \subset \mathcal{B}_{f(F)}$ . Wegen  $f(U) \subset V$  folgt, dass auch  $V$  im Bildfilter  $f(F)$  ist. Da  $V$  eine beliebige Umgebung von  $f(x)$  war, folgt  $\mathcal{U}(f(x)) \subset f(F)$  und somit  $F(f) \rightarrow f(x)$ .  $\square$

**Satz 1.18.14.** *Ein Punkt  $x \in X$  eines topologischen Raums ist genau dann Berührungspunkt eines Filters  $F$  auf  $X$ , wenn es einen Filter  $G \supset F$  gibt, der gegen  $x$  konvergiert.*

*Beweis.* Hat der Filter  $F$  den Berührungspunkt  $x \in X$ , so ist

$$\mathcal{B} := \{U \cap Y \text{ mit } U \in \mathcal{U}(x) \text{ und } Y \in F\}$$

eine Filterbasis für einen Filter  $G$ , der feiner ist als  $F$  und  $\mathcal{U}(x)$  und somit gegen  $x$  konvergiert.

Gilt umgekehrt  $F \subset G$  und  $G \rightarrow x$ , so liegt jede Umgebung  $U \in \mathcal{U}(x)$  und jedes  $Y \in F$  im Filter  $G$ , also ist  $Y \cap U \neq \emptyset$ , also ist  $x$  Berührungspunkt des Filters  $F$ .  $\square$

**Satz 1.18.15.** *Seien  $(X_i)_{i \in I}$  topologische Räume und  $(f_i : X \rightarrow X_i)_{i \in I}$  Abbildungen. Wir versehen die Menge  $X$  mit der Initialtopologie. Dann konvergiert ein Filter  $F$  auf  $X$  genau dann gegen  $x \in X$ , wenn  $f_i(F) \rightarrow f_i(x)$  für alle  $i \in I$  gilt.*

*Beweis.* Konvergiere  $F \rightarrow x$ . Da die Abbildungen  $f_i$  bezüglich der Initialtopologie stetig sind, folgt mit Satz 1.18.13, dass  $f_i(F) \rightarrow f_i(x)$  für alle  $i \in I$  gilt.

Umgekehrt hat  $x \in X$  in der Initialtopologie nach Satz 1.10.3 die Umgebungsbasis aus Mengen

$$\bigcap_{e \in E} f_e^{-1}(V_e) \quad \text{mit } E \subset I \text{ endlich und } V_e \in \mathcal{U}(f_e(x)) .$$

Nach Annahme gibt es für jedes  $V_e$  mit  $e \in E$  ein  $U_e \in F$  mit  $f_e(U_e) \subset V_e$ . Es ist der endliche Schnitt  $U := \bigcap_{e \in E} U_e \in F$ . Aus  $f_e(U_e) \subset V_e$  folgt

$$f_e^{-1}(V_e) \supset f_e^{-1}f_e(U_e) \supset U_e$$

und somit  $U \subset \bigcap_{e \in E} f_e^{-1}(V_e)$ . Damit ist jedes Element der Umgebungsbasis von  $x \in X$  im Filter  $F$  enthalten, also  $F \rightarrow x$ .  $\square$

Als Spezialfall erhalten wir:

**Korollar 1.18.16.** *Seien  $(X_i)_{i \in I}$  topologische Räume und  $X := \prod_{i \in I} X_i$  ihr Produkt mit Projektionen  $\pi_i : X \rightarrow X_i$ . Ein Filter  $F$  auf  $X$  konvergiert genau dann gegen  $x \in X$ , wenn alle Bildfilter  $\pi_i(F) \rightarrow \pi_i(x)$  konvergieren.*

## 1.19 Filter und Kompaktheit

Wir verbinden nun die Ideen der letzten beiden Abschnitte.

**Lemma 1.19.1.** *Sei  $X$  ein topologischer Raum. Dann sind äquivalent:*

1.  $X$  ist kompakt.
2. Jeder Filter auf  $X$  hat einen Berührungspunkt.
3. Jeder Ultrafilter konvergiert.

*Beweis.*

1.  $\Rightarrow$  2. Sei  $F := \{Y_i\}_{i \in I}$  ein beliebiger Filter auf  $X$ . Betrachte die abgeschlossenen Mengen  $A_i := \bar{Y}_i$ . Dann sind alle endlichen Schnitte nicht-leer,

$$A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n} \neq \emptyset \quad \text{für alle } i_1, \dots, i_n,$$

weil  $F$  ein Filter ist. Nach Satz 1.17.3 ist dann  $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$ , wenn  $X$  kompakt ist. Jeder Punkt  $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$  ist dann Berührungspunkt von  $F$  nach Satz 1.18.12.

2.  $\Rightarrow$  3. Jeder Ultrafilter  $F$  habe einen Berührungspunkt  $x$ ; nach Satz 1.18.14 gibt es dann einen feineren Filter  $G \supset F$ , der gegen  $x$  konvergiert. Weil  $F$  Ultrafilter ist, ist  $F$  schon maximal und es gilt  $F = G$ .

3.  $\Rightarrow$  1. Sei  $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$  eine offene Überdeckung, für die es keine endliche Teilüberdeckung gibt. Für jede endliche Teilmenge  $E \subset I$  betrachte das Komplement

$$A_E := X \setminus (\bigcup_{e \in E} U_e) \neq \emptyset,$$

das wegen der Widerspruchsannahme nicht leer ist. Der Schnitt zweier Mengen  $A_E$  und  $A_{E'}$  ist

$$A_E \cap A_{E'} = X \setminus (\bigcup_{e \in E \cup E'} U_e) = A_{E \cup E'}$$

und enthält daher eine Menge der Form  $A_{E''}$ . Die Mengen  $(A_E)$  bilden daher die Basis eines Filters, der nach Lemma 1.18.8 in einem Ultrafilter  $F$  enthalten ist.

Nach Annahme gilt dann  $F \rightarrow x$  für ein  $x \in X$ , was heißt, dass  $F$  feiner ist als der Umgebungfilter von  $x$ . Da eine Überdeckung vorliegt, gibt es ein  $i \in I$  mit  $x \in U_i$ . Es muss wegen  $F \rightarrow x$  die Umgebung  $U_i$  von  $x$  in  $F$  liegen, also  $U_i \in F$  gelten. Aber nach Konstruktion von  $F$  muss auch  $A_{\{i\}} = X \setminus U_i \in F$  gelten, im Widerspruch zu Satz 1.18.9.  $\square$

Wir brauchen noch ein Lemma, dann folgt der Beweis des Satzes von Tychonoff auf sehr natürliche Art und Weise.

**Lemma 1.19.2.** *Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung und  $F$  ein Ultrafilter auf  $X$ . Dann ist  $f(F)$  ein Ultrafilter auf  $Y$ .*

*Beweis.* Wir verwenden Satz 1.18.9. Sei also  $A \subset Y$ . Dann ist  $X \setminus f^{-1}(A) = f^{-1}(Y \setminus A)$ . Da  $F$  ein Ultrafilter ist gilt  $f^{-1}(A) \in F$  oder  $f^{-1}(Y \setminus A) \in F$ . Aber im ersten Fall gilt  $f(f^{-1}A) \subset A$  und  $A \in f(F)$ , im zweiten Fall gilt  $f(f^{-1}(Y \setminus A)) \subset Y \setminus A$  and  $Y \setminus A \in f(F)$ .  $\square$

*Beweis von Satz 1.17.12.* Die Projektionen  $\pi_j : X \rightarrow X_j$  sind nach Satz 1.10.5 stetig und surjektiv. Daher sind nach Satz 1.17.6 die Bilder  $X_j$  kompakt, wenn  $X$  kompakt ist.

Seien umgekehrt alle  $X_j$  kompakt. Sei  $F$  ein Ultrafilter auf  $X$ . Dann ist für jedes  $j \in I$  der Bildfilter Nach Lemma 1.19.2 ist  $\pi_j(F)$  ein Ultrafilter. Nach Lemma 1.19.1 konvergiert  $\pi_j(F)$  gegen ein  $x_j \in X_j$ , weil  $X_j$  kompakt ist. Nach Satz 1.18.15 konvergiert dann  $F \rightarrow (x_j)_{j \in I}$ . Also ist das Produkt kompakt.  $\square$

Der Satz von Tychonoff lässt sich auch ohne Betrachtung von Ultrafiltern beweisen, siehe die Bücher von Munkres und Kelley.

Ultrafilter sind aber ein nützliches Konstrukt für die Analysis.

## 1.20 Abbildungsräume

Aus der linearen Algebra wissen Sie, dass die linearen Abbildungen zwischen zwei Vektorräumen selbst einen Vektorraum bilden. In der Topologie hätten wir gerne, dass die stetigen Abbildungen von  $X$  nach  $Y$  selbst einen topologischen Raum bilden.

**Definition 1.20.1.** Die **kompakt-offene Topologie** oder **KO-Topologie** auf  $\text{Hom}(X, Y)$  ist die Topologie mit der Subbasis  $B(K, V)$ , die wir wie folgt definieren.  $K$  variiert über die kompakten Teilmengen von  $X$  und  $V$  über die offenen Teilmengen von  $Y$ ;  $B(K, V)$  ist definiert als Menge aller stetigen Abbildungen  $f$  mit  $f(K) \subset V$ .

Wir schreiben  $\text{Map}(X, Y)$  für den topologischen Raum  $(\text{Hom}(X, Y), \mathcal{T}_{KO})$ , also die Menge aller stetigen Abbildungen von  $X$  nach  $Y$ , ausgestattet mit der KO-Topologie.

Zur Motivation bemerken wir ohne Beweis: Wenn  $Y$  ein metrischer Raum ist, dann ist die KO-Topologie identisch mit der Topologie der uniformen Konvergenz auf kompakten Untermengen. (Siehe zum Beispiel von Querenburg Abschnitt 14B.)

Die KO-Topologie hat gute Eigenschaften, wenn wir uns auf bestimmte topologische Räume beschränken.

**Definition 1.20.2.** Ein Raum  $X$  heißt **lokal kompakt** wenn es für jeden Punkt  $x$  und jede Umgebung  $U$  von  $x$  eine kompakte Umgebung  $K$  von  $x$  gibt mit  $x \in K \subset U$ .

**Bemerkung 1.20.3.** Man definiert  $X$  auch manchmal als lokal kompakt, wenn in  $X$  jeder Punkt eine kompakte Umgebung hat. Wenn  $X$  auch Hausdorff ist, lässt sich unsere Definition daraus herleiten, siehe von Querenburg, Abschnitt 8B.

Der folgende Satz ist Grundlage für die topologische Bedeutung der KO-Topologie.

**Satz 1.20.4.** *Seien  $X, Y, Z$  topologische Räume und sei  $Y$  lokal kompakt. Dann gibt es eine natürliche Bijektion  $G : \text{Hom}(X \times Y, Z) \cong \text{Hom}(X, \text{Map}(Y, Z))$ . Wir schicken dazu  $f(-, -)$  mit zwei Variablen zu der Funktion  $x \mapsto f(x, -)$ .*

*Beweis.* Wir prüfen zuerst, dass  $G$  eine Bijektion von Mengen ist. Zuerst einmal ist  $G$  wohldefiniert: Wenn  $f$  stetig ist, dann ist auch  $G(f)(x)$  für jedes  $x$  stetig. Das Inverse  $G^{-1}$  schickt  $h : X \rightarrow \text{Map}(Y, Z)$  nach  $(x, y) \mapsto h(x)(y)$ .

Es bleibt zu prüfen, dass  $G(f)$  genau dann stetig ist, wenn  $f$  stetig ist.

Sei also  $f : X \times Y \rightarrow Z$  stetig,  $x \in X$  und  $B(K, V)$  in der Subbasis von  $\text{Map}(Y, Z)$  sodass  $G(f)(x) \in B(K, V)$ . Die letzte Bedingung bedeutet, dass  $\{x\} \times K \subset f^{-1}(V)$ . Da  $f^{-1}(V)$  offen ist, gibt es Umgebungen  $U_k \times W_k \subset f^{-1}(V)$  von  $(x, k)$  für jedes  $k \in K$ , und da  $K$  kompakt ist finden wir eine endliche Teilüberdeckung  $K_0$  der  $W_k$ . Sei  $U = \bigcap_{k \in K_0} U_k$ . Dann ist  $U$  eine offene Umgebung von  $x$  in  $f^{-1}(V)$  und  $f(U \times K) \subset V$ , anders ausgedrückt  $U \subset G(f)^{-1}(B(K, V))$ . Wir haben nicht benutzt, dass  $Y$  lokalkompakt ist.

Sei umgekehrt  $G(f)$  stetig,  $x \in X$ ,  $y \in Y$  und  $V$  eine offene Umgebung von  $f(x, y)$  in  $Z$ . Wir suchen Umgebungen  $U$  von  $x$  und  $W$  von  $Y$  mit  $f(U \times W) \subset V$ . Es ist  $f(x, -) : Y \rightarrow Z$  eine stetige Funktion. Da  $Y$  lokalkompakt ist, können wir eine kompakte Umgebung  $K$  von  $y$  wählen so dass  $f(\{x\} \times K) \subset V$ . Aus der Stetigkeit von  $G(f)$  folgt, dass  $U = \{x' \in X \mid G(f)(x') \in B(K, V)\}$  offen in  $X$  ist. Also ist  $U \times K$  die gesuchte Umgebung von  $(x, y)$ .  $\square$

**Korollar 1.20.5.** Sei  $X$  lokal kompakt. Die Evaluierung  $ev : (f, x) \mapsto f(x)$  von  $\text{Map}(X, Y) \times X$  nach  $Y$  ist stetig. Insbesondere ist  $ev_x : f \mapsto f(x)$  stetig für jedes  $x \in X$ .

*Beweis.* Nach Satz 1.20.4 gilt, dass  $ev : \text{Map}(X, Y) \times X \rightarrow Y$  stetig ist, wenn  $G(ev) : \text{Map}(X, Y) \rightarrow \text{Map}(X, Y)$  stetig ist. Aber  $G(ev) : f \mapsto ev(f, -)$ . Also gilt  $G(ev)(f) : x \mapsto f(x)$ , und  $G(ev)$  ist die Identität.

Die zweite Aussage folgt durch Komposition mit der stetigen Inklusion  $\text{Map}(X, Y) \times \{x\} \rightarrow \text{Map}(X, Y) \times X$ .  $\square$

**Bemerkung 1.20.6.** Durch Inspektion des Beweises von Korollar 1.20.5 lässt sich auch zeigen, dass die KO-Topologie die grösste Topologie ist, so dass die Evaluierungsabbildung stetig ist.

## 1.21 Kategorien

Wir wollen die Konstruktion von Produkt und Koproduct und die entscheidende Rolle der universellen Eigenschaften verallgemeinern und besser verstehen. Das ist Gegenstand der Kategorientheorie.

**Definition 1.21.1.** Eine **Kategorie**  $\mathcal{C}$  besteht aus den folgenden Daten:

- eine Klasse von **Objekten**  $\text{Ob}(\mathcal{C})$ ,
- für jedes Paar von Objekten  $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  eine Klasse von **Morphismen**  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  (manchmal auch Pfeile genannt),
- für jedes Objekt  $X$  einen ausgezeichneten Morphismus  $\text{id}_X \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ , die **Identität**,
- für je drei Objekte  $X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  eine **Verknüpfung**  $\circ : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$ ,

so dass gilt:

- die Verknüpfung ist assoziativ:  $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ ,
- die Identität ist eine Identität für die Verknüpfung:  $\text{id}_Y \circ f = f = f \circ \text{id}_X$  für  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ .

Wenn  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  dann nennen wir  $X$  die **Quelle** und  $Y$  das **Ziel** von  $f$ .

### Beispiele 1.21.2.

1. Mengen und Abbildungen formen eine Kategorie, die wir mit **Set** bezeichnen.
2. Topologische Räume und stetige Abbildungen formen eine Kategorie, die wir mit **Top** bezeichnen.
3. In der Algebra finden wir viele weitere Kategorien: Gruppen und Homomorphismen formen eine Kategorie **Group**, Vektorräume und lineare Abbildungen formen die Kategorie **Vect**, auch abelsche Gruppen, Ringe, Körper etc. formen Kategorien.
4. Es gibt eine Kategorie mit einem Objekt und einem Morphismen. Allgemein heißt eine Kategorie **diskret** wenn die einzigen Morphismen die Identitäten sind. Jede Menge  $I$  kann auch als diskrete Kategorie **I** mit  $\text{Ob}(\mathbf{I}) = I$  aufgefasst werden.
5. Für jede Kategorie  $\mathcal{C}$  gibt es eine **duale Kategorie**  $\mathcal{C}^{op}$  mit den gleichen Objekten,  $\text{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(A, B) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$  und  $f \circ_{\mathcal{C}^{op}} g := g \circ_{\mathcal{C}} f$ .  $\mathcal{C}^{op}$  entsteht also aus  $\mathcal{C}$ , indem wir alle Pfeile umdrehen.

**Definition 1.21.3.** Ein Morphismus  $f : C \rightarrow D$  heißt Isomorphismus, wenn es  $g : D \rightarrow C$  gibt mit  $g \circ f = \text{id}_C$  und  $f \circ g = \text{id}_D$ .

Homöomorphismen und (Gruppen-)Isomorphismen sind Beispiele. In allen Kategorien werden wir isomorphe Objekte als äquivalent betrachten.

**Bemerkung 1.21.4.** Da wir Kategorien wie die Kategorie aller Mengen betrachten wollen, ist es wichtig, dass wir nicht nur eine Menge sondern eine Klasse von Objekten zulassen. Man kann auch Hierarchen von Mengen verwenden, so genannte *Universen*. Wir werden uns in diesem Kurs nicht weiter für diese Grundlagenfragen interessieren.

Wenn eine Kategorie eine Menge von Objekten und Morphismen hat, dann sprechen wir von einer **kleinen Kategorie**.

**Beispiel 1.21.5.** Eine kleine Kategorie in der es zwischen je zwei Objekten höchstens einen Morphismus gibt, und in der jeder Isomorphismus eine Identität ist, heißt **partielle Ordnung**. Die Verknüpfung ist dann eindeutig von den Morphismen bestimmt (da es nur eine Funktion in eine Menge mit einem Element gibt). Ein Beispiel ist die Kategorie  $\mathbb{N}$  mit Objekten gegeben von den natürlichen Zahlen und es gibt einen Morphismus  $i \rightarrow j$  genau dann, wenn  $i \leq j$ .

Wir kennen eine partielle Ordnung schon als Relation  $\leq$ , die reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist. Es ist eine Übung die Äquivalenz der beiden Begriffe zu zeigen.

Ein wichtiger Impetus zum Studium von Kategorien ist die Beobachtung, dass wir mathematische Objekte oft am besten durch die Abbildungen zwischen ihnen verstehen. Das gleiche Prinzip gilt natürlich für Kategorien.

**Definition 1.21.6.** Ein **Funktor**  $F$  zwischen zwei Kategorien  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{D}$  besteht aus den folgenden Daten:

- eine Abbildung, die jedem  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  ein Objekt  $F(X) \in \text{Ob}(\mathcal{D})$  zuweist
- für jedes Paar von Objekten  $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  eine Abbildung von  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  nach  $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$ , die wir als  $f \mapsto F(f)$  schreiben,

so dass gilt:

- $F$  ist kompatibel mit Verknüpfungen:  $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ ,
- $F$  bewahrt Identitäten:  $F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)}$ .

**Beispiele 1.21.7.**

1. Eine Familie topologischer Räume  $(X_i)_{i \in I}$  ist genau ein Funktor von  $I$ , betrachtet als diskrete Kategorie, nach **Top**.
2. Für jeden topologischen Raum  $X$  sei  $\pi_0(X)$  die Menge der Wegkomponenten. Wir haben im Beweis von Satz 1.15.8 gesehen, dass jede stetige Abbildung eine Abbildung von Wegkomponenten induziert und  $\pi_0$  so zum Funktor **Top**  $\rightarrow$  **Set** wird.
3. Von jeder Kategorie, deren Objekte eine zugrundeliegende Menge haben (z.B. **Top**, **Group**, **Vect**) gibt es einen **Vergessfunktor** nach **Set**, der alle zusätzliche Struktur vergisst und nur die zugrundeliegende Menge betrachtet.

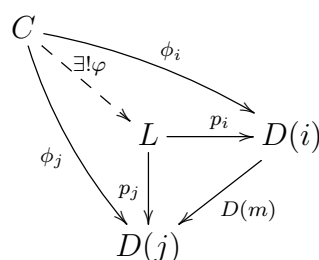
## 1.22 Limes und Kolimes

**Definition 1.22.1.** Sei  $I$  eine kleine Kategorie und  $\mathcal{C}$  eine beliebige Kategorie. Ein **Diagramm** über  $I$  in  $\mathcal{C}$  ist ein Funktor  $D : I \rightarrow \mathcal{C}$ . Ein **Kegel** von  $C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  auf  $D$  ist eine Familie  $\phi_i : C \rightarrow D(i)$  von Morphismen in  $\mathcal{C}$  so dass für jeden Morphismus  $m : i \rightarrow j$  in  $I$  gilt  $D(m) \circ \phi_i = \phi_j$ .

Ein **Limes** für das Diagramm  $D$  ist ein Kegel  $(p_i : L \rightarrow D(i))_{i \in I}$  in  $\mathcal{C}$  so dass für jeden Kegel  $(\phi_i : C \rightarrow D(i))$  auf  $D$  genau einen Morphismus  $\varphi : C \rightarrow L$  gibt so dass  $\phi_i = p_i \circ \varphi$  für alle  $i$ .

Wir nennen dann auch  $L$  einen Limes für  $D$  und schreiben  $L = \lim_I D$ .

Als Diagramm, sieht das so aus:



Ein Limes ist also ein universeller Kegel.

Wir schreiben in einem Diagramm  $D$  oft  $D_i$  für  $D(i)$ . Des weiteren schreiben wir  $\lim_I D_i$ . Diese Schreibweise ist etwas gefährlich, da sie die Morphismen zwischen den  $D_i$  unterdrückt, die für den Limes natürlich sehr wichtig sind.

Wir interessieren uns vor allem für Fälle in denen die Kategorie  $I$  eine recht einfache Struktur hat.

Ein wichtiges motivierendes Beispiel ist das folgende:

**Beispiel 1.22.2.** Sei  $I$  eine diskrete Kategorie. Dann ist ein Diagramm  $X$  über  $I$  genau eine Familie  $\{X_i\}_{i \in I}$  von Objekten. Denn die einzigen Morphismen in  $I$  sind die Identitäten, und  $X(\text{id}_i) = \text{id}_{X_i}$  nach Definition 1.21.6. Also brauchen wir nur den ersten Teil der Definition eines Funktors, und das ist eine Familie von Objekten.

Wenn  $X$  ein Diagramm in **Top** ist, dann ist nach Satz 1.10.6  $\prod_{i \in I} X_i$  ein Limes für  $X$ . Betrachten wir ein Diagramm in **Set** dann ist genauso  $\prod_{i \in I} X_i$  ein Limes für  $X$ .

Wie jede universelle Konstruktion ist auch der Limes eindeutig – wenn er existiert. Wir benutzen deswegen auch den bestimmten Artikel.

**Satz 1.22.3.** Seien  $L$  und  $L'$  Limites für ein Diagramm  $D$ . Dann gibt es einen eindeutigen Isomorphismus zwischen  $L$  und  $L'$ .

*Beweis.* Nach Definition eines Limes gibt es  $p : L \rightarrow L'$  und  $q : L' \rightarrow L$  die mit allen Morphismen  $L \rightarrow D(i)$  und  $L' \rightarrow D(i)$  kompatibel sind. Dann ist aber auch  $p \circ q : L \rightarrow L$  mit allen Morphismen kompatibel. Nach Definition gibt es genau einen Morphismus  $L \rightarrow L$  mit dieser Eigenschaft. Es ist aber klar, dass  $\text{id}_L$  diese Eigenschaft hat. Also ist  $p \circ q = \text{id}_L$ . Genauso ist  $q \circ p = \text{id}_{L'}$  und  $p$  ist ein Isomorphismus.  $\square$

Wir sprechen hier auch von einem **kanonischen** Isomorphismus, was allgemein bedeutet, dass wir bei der Konstruktion des Isomorphismus keine Wahl hatten.

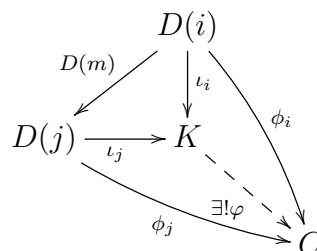
Man kann in der Definition eines Limes alle Morphismen umdrehen (man spricht von der *dualen* Definition) und erhält die Definition eines **Kolimes**.

**Definition 1.22.4.** Sei  $I$  eine kleine Kategorie,  $\mathcal{C}$  eine beliebige Kategorie und  $D$  ein Diagramm über  $I$  in  $\mathcal{C}$ . Ein **Kokegel** von  $C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  auf  $D$  ist eine Familie  $\phi_i : D(i) \rightarrow C$  von Morphismen in  $\mathcal{C}$  so dass für jeden Morphismus  $m : i \rightarrow j$  in  $I$  gilt  $\phi_j \circ D(m) = \phi_i$ .

Ein **Kolimes** für das Diagramm  $D$  ist ein Kokegel  $(\iota_i : D(i) \rightarrow K)_{i \in I}$  in  $\mathcal{C}$  so dass für jeden Kokegel  $(\phi_i : D(i) \rightarrow C)$  auf  $D$  genau einen Morphismus  $\varphi : K \rightarrow C$  gibt so dass  $\phi_i = \varphi \circ \iota_i$  für alle  $i$ .

Wir nennen dann auch  $K$  einen Kolimes für  $D$  und schreiben  $K = \text{colim}_I D$ .

Als Diagramm:



Auch der Kolimes ist eindeutig bis auf einen eindeutigen Isomorphismus.

**Satz 1.22.5.** Seien  $K$  und  $K'$  Koimites für ein Diagramm  $D$ . Dann gibt es einen eindeutigen Isomorphismus zwischen  $K$  und  $K'$ .

*Beweis.* Wie für Satz 1.22.3. □

**Beispiel 1.22.6.** Sei  $I$  eine diskrete Kategorie. Wir schreiben ein Diagramm  $X$  über  $I$  als Familie  $\{X_i\}_{i \in I}$  von Objekten. Für  $X$  in **Set** ist  $\text{colim}_I X$  die disjunkte Vereinigung der  $X_i$ .

Für  $X$  in **Top** ist nach Satz 1.11.4 ist  $\text{colim}_I X \cong \coprod_{i \in I} X_i$ , die disjunkte Vereinigung mit der Summentopologie.

## 1.23 Limes und Kolimes von topologischen Räumen

Wir werden aber nun die allgemeine Theorie hinter uns lassen und Beispiele studieren.

Wir werden nun alle Limes und Kolimes in **Top** über partiellen Ordnungen explizit berechnen. (Der allgemeine Fall ist nicht viel schwieriger.)

Sei also  $I$  eine partiell geordnete Menge, die wir als Kategorie auffassen können. Ein Diagramm über  $I$ , oder ein Funktor  $X : I \rightarrow \mathbf{Top}$ , besteht also aus

- einem topologischen Raum  $X_i$  für jedes  $i \in I$ ,
- einer stetigen Abbildung

$$f_{ji} : X_i \rightarrow X_j \quad \text{für alle } i \leq j,$$

so dass

- $f_{ii} = \text{id}_{X_i}$  für alle  $i \in I$  gilt.
- $f_{kj} \circ f_{ji} = f_{ki}$  für alle  $i \leq j \leq k$  gilt:

$$\begin{array}{ccc}
 & X_j & \\
 f_{ji} \nearrow & & \downarrow f_{kj} \\
 X_i & & X_k \\
 f_{ki} \searrow & & 
 \end{array}$$

Sei  $I$  eine partielle Ordnung und  $X : I \rightarrow \mathbf{Top}$  ein Diagramm. Wir schreiben  $f_{ji}$  für  $X(i \leq j)$ . Wir betrachten auf der Summe  $\coprod_{i \in I} X_i$  die Äquivalenzrelation, die von  $(x_i, i) \sim (f_{ji}(x_i), j)$  für  $i \leq j$  erzeugt wird.

Wir definieren temporär den topologische Raum

$$\text{colim}'_I X_i = \coprod_{i \in I} X_i / \sim$$

mit der Quotiententopologie aus Definition 1.12.1.

Man beachte, dass sowohl die topologische Summe nach Definition 1.11.3 als auch der Quotientenraum nach Definition 1.12.1 mit einer Finaltopologie versehen sind.



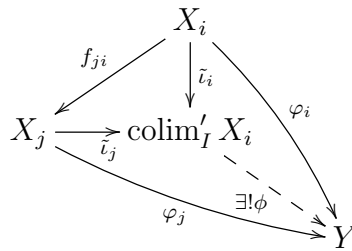
**Satz 1.23.1.** Sei  $I$  eine partielle Ordnung und  $X : I \rightarrow \mathbf{Top}$  ein Diagramm. Dann ist  $\text{colim}'_I X_i$  der Kolimes von  $X$ .

Wir schreiben noch einmal aus, was das bedeutet. Sei  $Y$  ein gegebener topologischer Raum. Dann gibt es zu jeder Familie  $(X_i \xrightarrow{\varphi_i} Y)_{i \in I}$  von stetigen Abbildungen mit  $\varphi_j \circ f_{ji} = \varphi_i$  für alle  $i \leq j$  genau eine stetige Abbildung

$$\phi : \text{colim}'_I X_i \rightarrow Y$$

mit  $\phi \circ f_{ij} = \varphi_j$ .

Als Diagramm, mit  $i \leq j$ ,



*Beweis.* Wir stellen zuerst aus den Definitionen fest, dass  $\text{colim}'_I X_i$  die korrekte universelle Eigenschaft für Mengen hat. Die Abbildung  $\phi$  existiert also eindeutig, wir müssen prüfen, dass  $\phi$  stetig ist.

In der Definition

$$\tilde{t}_j : X_j \xrightarrow{t_j} \coprod_{i \in I} X_i \xrightarrow{\pi} \coprod_{i \in I} X_i / \sim = \text{colim}'_I X_i$$

treten zweimal Finaltopologien auf, so dass  $\text{colim}'$  die Finaltopologie bezüglich den  $\tilde{t}_j$  hat. Die universelle Eigenschaft aus Satz 1.11.2 garantiert, dass  $\phi$  stetig ist. Damit erfüllt  $\text{colim}'$  die universelle Eigenschaft für topologische Räume.  $\square$

Insbesondere zeigt der Beweis, dass die Abbildungen  $\tilde{t}_j : X_j \rightarrow \text{colim}'_I X_i$  stetig sind.

### Beispiele 1.23.2.

1. Für  $I = (\mathbb{N}, \leq)$  mit der gewöhnlichen Ordnung. Dann ist ein Diagramm über  $I$  eine aufsteigende Kette  $X_1 \subset X_2 \subset \dots$  und es ist

$$\text{colim}_{\mathbb{N}} X_i = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} X_i / \sim = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i,$$

der Kolimes ist also die Vereinigung mit der Finaltopologie.

2.  $I$  kann die leere Kategorie sein. Dann ist  $X$  das leere Diagramm. Also ist jedes Objekt ein Kokegel und der Kolimes  $K$  hat die universelle Eigenschaft, dass es für jedes Objekt  $Y$  genau einen Morphismus  $K \rightarrow Y$  gibt. Es gilt also  $\text{colim}_{\emptyset} = \emptyset$ .

In allgemeinen Kategorien nennt man den Kolimes über die leere Kategorie auch ein **initiales Objekt**.

3. Betrachte die partiell geordnete Menge  $I = \{0, 1, 2\}$  mit  $0 < 1, 0 < 2$ , aber nicht  $1 < 2$ . Betrachte das zugehörige Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \xrightarrow{f_{10}} & X_1 \\ f_{20} \downarrow & & \\ & & X_2 \end{array}$$

Der Kolimes über  $I$  heißt auch **pushout**.

Nehmen wir nun an, dass  $X_0 \subset X_1$  ein abgeschlossener Unterraum ist und benennen Objekte und Morphismen um.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{t} & X \\ f \downarrow & & \\ & & Y \end{array}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \operatorname{colim} X_i &= A \amalg X \amalg Y / (a,0) \sim (a,1) \sim (f(a),2) \\ &= X \amalg Y / (a,1) \sim (f(a),2) \\ &= X \cup_f Y. \end{aligned}$$

Das ist genau die Verklebung entlang  $f$  aus Definition 1.16.5.

4. Setze wieder  $I = (\mathbb{N}, \leq)$ . Wir betrachten  $X_n := \mathbb{S}^n$  und  $X_n \rightarrow X_{n+1}$  ist die Einbettung, die  $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  als Äquator von  $\mathbb{S}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$  auffasst,

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^n &\rightarrow \mathbb{S}^{n+1} \\ (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) &\mapsto (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}, 0). \end{aligned}$$

Wir bezeichnen  $\mathbb{S}^\infty := \operatorname{colim} \mathbb{S}^n$ .

5. Ein (allgemeiner) **CW-Komplex** ist der Kolimes von  $X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset \dots$  wobei  $X_0$  diskret ist und jedes  $X_n$  die Form  $X_{n-1} \cup_f D_{I_n}^n$  hat, für eine stetige Funktion  $f : \amalg_{i \in I_n} \partial D^n \rightarrow X_{n-1}$ .  $I_n$  kann leer sein und dann ist  $X_n = X_{n-1}$ .

Jedes  $X_n$  ist dann ein CW-Komplex, vgl. Beispiel 1.16.9, und  $X$  ist endlich-dimensional wenn das Systems schließlich konstant ist.

CW steht für *closure-finite weak-topology*. Closure-finite bedeutet dass der Abschluss jeder Zelle von endlich vielen offenen Zellen überdeckt wird. Weak topology bezieht sich auf folgende Charakterisierung der Topologie: Eine Teilmenge von  $X$  ist dann genau dann abgeschlossen, wenn sie den Abschluss jeder Zelle in einer abgeschlossenen Teilmenge schneidet.

$\mathbb{S}^\infty$  aus dem vorherigen Beispiel kann als unendlich-dimensionaler CW-Komplex  $\mathbb{S}^\infty = \amalg_{\mathbb{N}} (e^n \amalg e^n)$  aufgefasst werden.

Wir berechnen Limites dual:

**Definition 1.23.3.** Sei  $Y : I \rightarrow \mathbf{Top}$  ein Diagramm über einer partiellen Ordnung. Wir schreiben  $g_{ji}$  für  $Y(i \leq j)$ . Wir definieren

$$\lim' Y_i = \{(y_i)_{i \in I} \text{ mit } y_j = g_{ji}(y_i) \text{ für alle } i \leq j\},$$

mit der Unterraumtopologie. Dies ist der Unterraum der "kompatiblen Elemente" im Produkt  $\prod_{i \in I} Y_i$ .

Man beachte, dass sowohl das Produkt nach Definition 1.10.4 als auch der Unterraum nach Definition 1.6.1 mit einer Initialtopologie versehen sind.

Vollkommen analog zu Satz 1.23.1 kann man beweisen:

**Satz 1.23.4.** *Sei  $I$  eine partielle Ordnung und  $X : I \rightarrow \mathbf{Top}$  ein Diagramm. Dann ist  $\lim'_I X_i$  der Limes von  $X$ .*

**Beispiele 1.23.5.**

1. Für  $I = \emptyset$  gilt  $\lim_\emptyset = *$ , der topologische Raum mit einem Punkt. Der Limes über ein leeres Diagramm heißt auch das **finale Objekt**.
2. Betrachte  $I = \{0, 1, 2\}$  mit  $1 < 0, 2 < 0$ , aber nicht  $2 \not< 1$ . Dies ist die duale Kategorie zu  $I$  aus Beispiel 1.23.2.4. (Da Kolimes und Limes dual sind, ist es oft interessant den Limes über einem Diagramm  $I$  und den Kolimes über dem dualen Diagramm  $I^{op}$  zu betrachten.)

Betrachte das zugehörige Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & Y_2 & \\ & \downarrow g_{02} & \\ Y_1 & \xrightarrow{g_{01}} & Y_0 \end{array}$$

Der Limes

$$\lim_I Y_i \cong \{(y_0, y_1, y_2) \mid g_{02}(y_2) = y_0 = g_{01}(y_1)\} \cong \{(y_1, y_2) \mid g_{02}(y_2) = g_{01}(y_1)\}$$

ist das **Faserprodukt**  $Y_1 \times_{Y_0} Y_2$  oder der **pullback** von  $Y_1$  und  $Y_2$  über  $Y_0$ . Wir schreiben

$$\begin{array}{ccc} Y_1 \times_{Y_0} Y_2 & \longrightarrow & Y_2 \\ \downarrow & & \downarrow g_{02} \\ Y_1 & \xrightarrow{g_{01}} & Y_0 \end{array}$$

3. Sei  $(X, x_0)$  ein topologischer Raum mit Grundpunkt und  $PX$  die Menge aller Wege, die in  $x_0 \in X$  starten. Als Unterraum von  $\text{Map}([0, 1], X)$  ist dies nach Definition 1.20.1 ein topologischer Raum.

$PX$  ist auch der Limes von

$$\begin{array}{ccc} \text{Map}([0, 1], X) & & \\ & \downarrow ev_0 & \\ \{x_0\} & \longrightarrow & X \end{array}$$

Wir beachten, dass die Abbildung  $ev_0$ , die einem Weg  $w : [0, 1] \rightarrow X$  seinen Anfangspunkt zuordnet,  $ev_0(w) := w(0)$ , nach Korollar 1.20.5 stetig ist.

Betrachte nun den Pullback von

$$\begin{array}{ccc} PX & & \\ & \downarrow ev_1 & \\ \{x_0\} & \longrightarrow & X \end{array}$$

Dies ist

$$\lim_I Y_i = \{(w, x_0) \in PX \times \{x_0\} \mid w(1) = x_0\},$$

also der Raum aller Wege in  $X$ , die in  $x_0$  anfangen und aufhören. Wir nennen dies den **Schleifenraum** von  $(X, x_0)$ , geschrieben  $\Omega(X, x_0)$ .

4. Sei  $p \in \mathbb{N}$  eine fest gewählte Primzahl. Wir betrachten das Diagramm über  $(\mathbb{N}, \leq)^{op} = (\mathbb{N}, \geq)$

$$\left( \mathbb{Z}/p \xleftarrow{\pi_1} \mathbb{Z}/p^2 \xleftarrow{\pi_2} \mathbb{Z}/p^3 \xleftarrow{\quad} \dots \right)$$

mit den üblichen Projektionen  $\mathbb{Z}/p^{n+1} \xrightarrow{\pi_n} \mathbb{Z}/p^n$ . Wir versehen hierbei  $\mathbb{Z}/p^n$  mit der diskreten Topologie. Dann ist

$$\mathbb{Z}_p = \lim_n \mathbb{Z}/p^n = \{(x_1, x_2, \dots) \mid x_n \in \mathbb{Z}/p^n, \pi_n(x_{n+1}) = x_n\} \subset \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^n.$$

Dies ist die Vervollständigung von  $\mathbb{Z}$  mit der  $p$ -adischen Metrik aus Übungsaufgabe 1.4!

Wir nennen  $\mathbb{Z}_p$  die ganzen  $p$ -adischen Zahlen. Sie haben nicht nur eine Topologie, sondern auch eine (kompatible) Ringstruktur.

## 1.24 Normale Räume und Urysohn's Lemma

Wir kehren noch einmal zurück zur mengentheoretischen Topologie und befassen uns mit Urysohns Lemma. Um es überhaupt formulieren zu können wenden wir uns zuerst einer Variante der Hausdorff-Begriffs zu.

Wir erinnern, dass sich der Umgebungsbegriff erweitern lässt: eine **Umgebung**  $V$  einer beliebigen Teilmenge  $A$  eines topologischen Raums  $(X, \mathcal{T})$  ist eine Obermenge einer offenen Menge  $O \in \mathcal{T}$ , welche die Teilmenge enthält,  $A \subset O \subset V$ . von  $A$ .

**Definition 1.24.1.** Ein topologischer Raum  $(X, \mathcal{T})$  heißt **normal** wenn  $X$  für je zwei abgeschlossene disjunkte Teilmengen von  $X$  disjunkte Umgebungen hat.

Vorsicht: Die Literatur ist uneinheitlich. Manchmal wird zusätzlich verlangt, dass normale Räume Hausdorff sind. Es kursiert auch der Begriff T4, in unserer Konvention bezeichnet er normale Hausdorffsche Räume, anderswo wird er für diejenigen Räume verwendet, die wir normal nennen.

Solange alle Punkte abgeschlossen sind (diese Eigenschaft heißt T1), folgt die Hausdorff-Eigenschaft sofort aus Normalität.

Wir erinnern uns, dass sich die Hausdorff-Eigenschaft auf beliebige Teilmengen vererbt, vgl. Satz 1.13.4. Allgemeine Teilmengen normaler Räume müssen hingegen nicht normal sein! Abgeschlossene Teilmengen normaler Räume hingegen sind normal. (Der Beweis ist Routine.)

Auch Produkte normaler Räume sind nicht immer normal. Die Gegenbeispiele sind recht kompliziert, siehe Abschnitt 6B in von Querenburg.

Wir werden in Kürze sehen, dass alle metrischen Räume normal sind. Eine weitere wichtige Klasse von normalen Räumen ist die folgende.

**Satz 1.24.2.** *Jeder kompakte Hausdorffraum  $X$  ist normal.*

*Beweis.* Seien  $A, B$  disjunkte abgeschlossene Teilmengen von  $X$ ; sie sind nach Satz 1.17.5 beide kompakt. Weil  $X$  Hausdorffsch ist, finde für jedes Paar  $a \in A$  und  $b \in B$  disjunkte offene Umgebungen  $U_{ab}$  von  $a$  und  $V_{ab}$  von  $b$ . Dann hat für festes  $a \in A$  die offene Überdeckung  $\cup_{b \in B} V_{a,b}$  der kompakten Menge  $B$  eine endliche offene Teilüberdeckung  $\cup_{i=1}^n V_{a,b_i}$ . Dann ist der endliche Durchschnitt  $\cap_{i=1}^n U_{a,b_i}$  eine offene Umgebung von  $a$ , die disjunkt zur offenen Menge  $\cup_{i=1}^n V_{a,b_i}$  ist, die  $B$  enthält. Man kann also  $B$  und jeden Punkt  $a \in A$  durch offene Umgebungen trennen. Nach Lemma 1.17.8 kann man dann auch  $A$  und  $B$  durch offene Mengen trennen, also ist  $X$  normal.  $\square$

Wir erreichen nun das zweite zentrale Theorem der mengentheoretischen Topologie. Mit Urysohns Lemma lassen sich stetige Funktionen konstruieren, was man zum Beispiel verwenden kann, um zu zeigen, dass alle regulären Hausdorff-Räume mit abzählbarer Basis metrisierbar sind, oder dass man kompakte Mannigfaltigkeiten in  $\mathbb{R}^n$  einbetten kann.

**Theorem 1.24.3** (Urysohns Lemma). *Ein topologischer Raum  $X$  ist genau dann normal wenn gilt: Zu je zwei disjunkten abgeschlossenen Teilmengen  $A, B$  existiert eine stetige reellwertige Funktion*

$$f : X \rightarrow [0, 1] \subset \mathbb{R} ,$$

so dass

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in A \\ 1 & x \in B \end{cases}$$

Man nennt eine solche Funktion eine Urysohn-Funktion.

*Beweis.* Nehmen wir zuerst 2. an. Dann ist  $X$  normal, denn für jede Urysohn-Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  trennen die disjunkten offenen Umgebungen

$$A \subset f^{-1}([0, \frac{1}{2})) \quad \text{und} \quad B \subset f^{-1}((\frac{1}{2}, 1])$$

die abgeschlossenen Teilmengen  $A$  und  $B$ .

Wir wenden uns nun dem deutlich schwierigeren zweiten Teil zu.

Wir nennen eine endliche Kette von Teilmengen

$$A = A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_k \subset X \setminus B$$

zulässig, wenn  $\overline{A_{i-1}} \subset \overset{\circ}{A}_i$  und  $\overline{A_k} \subset X \setminus B$  gilt.

Ist  $X$  normal und sind  $A, B$  abgeschlossene disjunkte Teilmengen, so existiert jedenfalls eine zulässige Kette der Länge  $k = 1$ : finde disjunkte Umgebungen  $A \subset U$  und  $B \subset V$ . Dann gilt

$$A \subset \overset{\circ}{U} \subset \overline{U} \subset X \setminus B .$$

Die erste Inklusion gilt, weil  $U$  Umgebung von  $A$  ist; die dritte Inklusion, weil die Teilmenge  $X \setminus \overset{\circ}{V} \subset X \setminus B$  in  $X$  abgeschlossen ist und daher  $\overline{U} \subset X \setminus \overset{\circ}{V}$  gilt.

Gegeben eine zulässige Kette, können wir eine zulässige Kette

$$A = A_0 \subset A'_0 \subset A_1 \subset A'_1 \dots \subset A_k \subset A'_k \subset X \setminus B$$

doppelter Länge finden, indem wir das Argument auf die disjunkten abgeschlossenen Mengen  $\overline{A_{i-1}}$  und  $X \setminus \overset{\circ}{A}_i$  anwenden.

Nachdem wir  $n$ -mal verfeinert haben, erhalten wir eine zulässige Kette  $\mathcal{A}_n = (A_0^n \subset A_1^n \subset \dots \subset A_{2^n-2}^n \subset A_{2^n-1}^n)$ . Wir definieren noch  $A_{2^n}^n := X$  und  $A_{-1}^n := \emptyset$  um uns spätere Fallunterscheidungen zu ersparen.

Für jedes  $(\mathcal{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definieren wir nun eine Treppenfunktion  $f_n : X \rightarrow [0, 1]$  durch

$$f_n(x) = \frac{k}{2^n} \quad \text{für } x \in A_k \setminus A_{k-1} .$$

Die Funktionenfolge ist monoton fallend und beschränkt, konvergiert also punktweise gegen eine Grenzfunktion  $f$ . Da  $A \subset A_0$ , ist  $f$  konstant 0 auf  $A$  und ebenso konstant 1 auf  $B$ .

Es bleibt zu zeigen, dass die Grenzfunktion  $f$  stetig ist. Dazu beachte, dass für jedes  $x \in X$  gilt

$$|f_n(x) - f_{n+1}(x)| \leq 2^{-(n+1)} .$$

In der Kette  $\mathcal{A}_n$  gilt für  $x, y \in U := \overset{\circ}{A}_k \setminus \overline{A_{k-1}}$

$$f_n(x) = f_n(y) .$$

Damit folgt für solche  $x, y$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| \\ &\leq \sum_{k=n+1} 2^{-k} + 0 + \sum_{k=n+1} 2^{-k} \end{aligned}$$

und somit ist  $U$  eine Umgebung von  $x$  mit  $f(U) \subset B_{3 \cdot 2^{-n}}(f(x))$ . Also ist  $f$  stetig in  $x$ .  $\square$

Das folgende Korollar folgt aus der einfachen Richtung von Urysohns Lemma.

**Korollar 1.24.4.** *Metrische Räume sind normal.*

*Beweis.* Sie haben in Übung 1.3(c) eine Urysohn-Funktion für abeglossene Teilmengen eines metrischen Raumes konstruiert! Aus Theorem 1.24.3 folgt nun, dass  $X$  normal ist.  $\square$

## 2 Einführung in die algebraische Topologie

### 2.1 Homotopien

Im folgenden seien  $X, Y, Z$  topologische Räume. Abbildungen  $f, g, H, \dots$  seien stetig, wenn nichts anderes vorausgesetzt wurde. Mit  $I = [0, 1]$  bezeichnen wir das Standard-Intervall.

**Definition 2.1.1.**

1. Eine **Homotopie** ist eine (stetige) Abbildung

$$H : X \times I \rightarrow Y .$$

2. Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  heißt **homotop** zu einer Abbildung  $g : X \rightarrow Y$ , wenn es eine Homotopie  $H : X \times I \rightarrow Y$  gibt mit  $f(x) = H(x, 0)$  und  $g(x) = H(x, 1)$  für alle  $x \in X$ . Wir schreiben dann  $f \simeq g$  und betrachten die durch das Intervall  $I$  parametrisierte Familie von Abbildungen  $H_t : X \rightarrow Y$  mit  $H_t(x) = H(x, t)$ .

**Beispiel 2.1.2.** Wenn  $X$  ein Punkt ist dann ist eine Homotopie genau ein Weg in  $Y$ .

Sei  $\iota : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  die übliche Inklusion und  $c_0 : S^1 \rightarrow (0, 0)$  die konstante Funktion. Dann ist  $H : S^1 \times I \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $H(z, t) = (1-t)z$  eine Homotopie von  $\iota$  nach  $c_0$ .

**Lemma 2.1.3.** *Die Relation  $\simeq$  ist eine Äquivalenzrelation.*

*Beweis.* Es gilt  $f \simeq f$ , wegen der konstanten Homotopie  $H(x, t) = f(x)$  für alle  $t \in I$ . Gilt  $f \simeq g$  mit Homotopie  $H(x, t)$ , so ist  $\tilde{H}(x, t) := H(x, 1-t)$  eine Homotopie von  $g$  nach  $f$ .

Sei  $H$  Homotopie von  $f$  nach  $g$  und  $H'$  von  $g$  nach  $h$ . Dann ist

$$H''(x, t) := \begin{cases} H(x, 2t) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ H'(x, 2t-1) & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

eine Homotopie von  $f$  nach  $h$ . □

**Definition 2.1.4.** Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung zwischen zwei topologischen Räumen. Die Äquivalenzklasse

$$[f] := \{g : X \rightarrow Y \mid g \simeq f\}$$

heißt die **Homotopieklasse** von  $f$ .

Die **Homotopiemenge** von zwei topologischen Räumen  $X, Y$  ist die Menge von Homotopieklassen von Abbildungen

$$[X, Y] := \{[f] \mid f : X \rightarrow Y\} .$$

**Lemma 2.1.5.** *Seien  $f, g : X \rightarrow Y$  Abbildungen mit  $f \simeq g$  und seien  $k, h : Y \rightarrow Z$  Abbildungen mit  $k \simeq h$ . Dann ist  $k \circ f \simeq h \circ g$ .*

*Beweis.* Ist  $H : X \times I \rightarrow Y$  eine Homotopie von  $f$  nach  $g$ , so ist

$$k \circ H : X \times I \xrightarrow{H} Y \xrightarrow{k} Z$$

eine Homotopie von  $k \circ f$  nach  $k \circ g$ . Ebenso ist

$$H' \circ (f \times \text{id}) : X \times I \xrightarrow{f \times \text{id}} Y \times I \xrightarrow{H'} Z$$

eine Homotopie von  $k \circ f$  nach  $h \circ f$  wenn  $H'$  eine Homotopie von  $k$  nach  $h$  ist. Dank der Transitivität von  $\simeq$  vervollständigt dies den Beweis.  $\square$

**Definition 2.1.6.** Gegeben

$$W \xrightarrow{h} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{k} Z$$

haben wir wegen Lemma 2.1.5 wohldefinierte Abbildungen

$$k_* : \begin{array}{l} [X, Y] \rightarrow [X, Z] \\ [f] \mapsto [k \circ f] \end{array}$$

und

$$h^* : \begin{array}{l} [X, Y] \rightarrow [W, Y] \\ [f] \mapsto [f \circ h] \end{array}$$

**Korollar 2.1.7.** Für  $k_1 \simeq k_2 : Y \rightarrow Z$  gilt  $(k_1)_* = (k_2)_*$ . Für  $h_1 \simeq h_2 : W \rightarrow X$  gilt  $(h_1)^* = (h_2)^*$ .

Mit Notation wie in der Definition gilt auch  $k_* \circ f_* = (k \circ f)_* : [W, X] \rightarrow [W, Z]$  und  $h^* \circ f^* = (f \circ h)^* : [Y, Z] \rightarrow [W, Z]$ .

*Beweis.* Die erste Aussage folgt sofort aus Lemma 2.1.5.

Die zweite Aussage folgt direkt aus der Definition.  $\square$

**Definition 2.1.8.**

1. Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  heißt **Homotopieäquivalenz**, falls es eine Abbildung  $g : Y \rightarrow X$  gibt mit

$$g \circ f \simeq \text{id}_X \quad \text{und} \quad f \circ g \simeq \text{id}_Y .$$

Dies ist tatsächlich eine Homotopieäquivalenz dank Lemma 2.1.5.

Die topologischen Räume  $X, Y$  heißen dann **homotopieäquivalent**, in Zeichen  $X \simeq Y$ .

2. Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  heißt **nullhomotop**, falls  $f$  homotop zu einer konstanten Abbildung ist. Wir schreiben dann  $f \simeq *$ .
3. Ein topologischer Raum  $X$  heißt **zusammenziehbar**, wenn  $\text{id}_X$  nullhomotop ist. Dann gibt es einen Punkt  $x_0 \in X$  und eine Homotopie  $H : X \times I \rightarrow X$  mit  $H(x, 0) = x$  und  $H(x, 1) = x_0$  für alle  $x \in X$ . Wir schreiben dann  $X \simeq *$ .
4. Ein topologischer Raum  $X$  mit einem ausgewählten Punkt  $x_0 \in X$  heißt Raum mit **Grundpunkt**. Kann nun die Homotopie  $H$  in 3. sogar so gewählt werden, dass  $H(x_0, t) = x_0$  für alle  $t \in I$ , so heißt der topologische Raum mit Grundpunkt  $(X, x_0)$  zusammenziehbar.



### Beispiele 2.1.9.

1. Jeder Homöomorphismus ist auch eine Homotopieäquivalenz.
2. Der  $\mathbb{R}^n$  ist in Bezug auf jeden Punkt  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  zusammenziehbar. Eine Homotopie ist

$$H(x, t) = (1 - t)x + tx_0 .$$

Genauso sind alle offenen oder abgeschlossenen Bälle in  $\mathbb{R}^n$  zusammenziehbar.

3. Ein Raum ist genau dann zusammenziehbar, wenn er homotopieäquivalent zu einem Einpunktraum ist. Dazu betrachte die eindeutige Abbildung  $f : X \rightarrow *$  und die Abbildung  $g : * \rightarrow X$  mit  $g(*) = x_0$ . Dann ist  $f \circ g = \text{id}_*$  und  $g \circ f : X \rightarrow X$  die konstante Abbildung mit Wert  $x_0$ , die wir mit  $c_{x_0}$  bezeichnen.

$X$  ist genau dann zusammenziehbar, wenn es eine Homotopie  $H$  von  $\text{id}_X$  zu  $g \circ f$  gibt. Dies rechtfertigt die Notation  $X \simeq *$  für einen zusammenziehbaren Raum.

4. Wir erinnern uns aus Beispiel 1.23.5.3 an  $PX$ , den Raum aller Wege in  $X$ , die von  $x_0$  ausgehen, ausgestattet mit der KO-Topologie.

$PX$  ist zusammenziehbar. Wir konstruieren eine Homotopie  $H : PX \times I \rightarrow PX$  von der Identität zum konstant Pfad  $x_0$ . Dafür definieren wir  $H(w, t)(s) = w((1 - t)s)$ . Es gilt  $H(w, 0) = w$ ,  $H(w, 1) \equiv w(0) = x_0$  und man kann prüfen, dass  $H$  stetig ist.

Wir können nun eine neue Kategorie definieren.

**Definition 2.1.10.** Die **Homotopie-Kategorie** hat als Objekte alle topologischen Räume und als Morphismen von  $X$  nach  $Y$  die Homotopiemenge. Wir schreiben kurz **hTop** und es gilt  $\text{Hom}_{\mathbf{hTop}}(X, Y) = [X, Y]$ .

Es folgt aus Lemma 2.1.5 dass die Verknüpfung wohldefiniert ist. Homotopie-Äquivalenzen sind genau Isomorphismen in **hTop** und es gilt:

**Korollar 2.1.11.** *Gilt  $X \simeq X'$ , so haben wir für jeden topologischen Raum  $Y, Z$  Bijektionen*

$$[X, Y] \cong [X', Y] \quad \text{und} \quad [Z, X] \cong [Z, X'] .$$

*Beweis.* Sei  $f : X \simeq X'$  eine Homotopieäquivalenz mit Homotopieinversen  $g$ . Dann sind  $f_*$  und  $g_*$  inverse Abbildungen zwischen  $[Z, X]$  und  $[Z, X']$  dank Korollar 2.1.7.  $\square$

Insbesondere gilt für  $X \simeq *$ , dass  $|[W, X]| = |[W, *]| = 1$  für alle topologischen Räume  $W$ . Es gilt auch  $[X, W] \cong [*, W] \cong \pi_0(W)$ .

**Definition 2.1.12.**

1. Eine Teilmenge  $Y \subset X$  mit Einbettung  $\iota : Y \rightarrow X$  heißt **Deformationsretrakt**, falls es eine Abbildung

$$r : X \times [0, 1] \rightarrow X$$

gibt mit  $r(x, 0) = x$  und  $r(x, 1) \in Y$  für alle  $x \in X$  und  $r(y, 1) = y$  für alle  $y \in Y$ , d.h.  $r_1 \circ \iota = \text{id}_Y$  und  $r_0 = \text{id}_X$  und  $r_1(X) \subset Y$ .

Äquivalent kann man verlangen, dass es einen Retrakt  $r_1 : X \rightarrow Y$  gibt mit  $r_1 \circ \iota = \text{id}_Y$  und  $\iota \circ r_1 \simeq \text{id}_X$ . Insbesondere gilt also  $X \simeq Y$ .

2. Gilt zusätzlich  $r(y, t) = y$  für alle  $t \in I$  und alle  $y \in Y$ , so heißt  $Y \subset X$  **starker Deformationsretrakt**.

### Beispiele 2.1.13.

1. Der Unterraum  $\mathbb{S}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  ist ein Deformationsretrakt, wie die Abbildung

$$r_t(x) = (1-t)x + t \frac{x}{\|x\|}$$

zeigt. Es liegt sogar ein starker Deformationsretrakt vor.

2. Indem man ein Möbiusband auf seine Mittellinie zusammenzieht, sieht man, dass es homotopieäquivalent zu  $\mathbb{S}^1$  ist.

### Definition 2.1.14.

1. Sei  $A \subset X$  und seien zwei Abbildungen  $X \xrightarrow{f,g} Y$  gegeben mit  $f|_A = g|_A$ .  $f$  heißt **homotop** zu  $g$  **relativ** zu  $A$ ,  $f \simeq g \text{ rel } A$ , falls es eine Homotopie  $H$  gibt mit

$$H(x, 0) = f(x), \quad H(x, 1) = g(x) \text{ für alle } x \in X$$

und

$$H(a, t) = f(a) = g(a) \text{ für alle } a \in A \text{ und } t \in I.$$

2. Für  $A \subset X$  und  $B \subset Y$  setzen wir

$$[X, A; Y, B] = \{[f] \mid f(A) \subset B, [\cdot] \text{ Homotopieklassen relativ zu } A\}.$$

Insbesondere ist also  $Y \subset X$  ein starker Deformationsretrakt wenn  $\iota \circ r_1$  homotop zu  $\text{id}_X$  ist relativ zu  $Y$ .

Wir werden im nächsten Abschnitt wichtige Beispiele treffen.

## 2.2 Fundamentalgruppen

Wir können nun topologischen Räumen eine erste algebraische Invariante zuzuordnen.

In der Folge werden wir topologische Räume mit Grundpunkt betrachten, geschrieben  $(X, x_0)$ . Eine stetige Funktion  $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  soll immer  $f(x_0) = y_0$  erfüllen.

**Definition 2.2.1.** Sei  $X$  wegzusammenhängend mit Grundpunkt  $x_0 \in X$ . Dann heißt

$$\pi_1(X, x_0) := [[0, 1], \{0, 1\}; X, x_0]$$

die **Fundamentalgruppe** von  $X$ .

Ein Element  $[w] \in \pi_1(X, x_0)$  wird also repräsentiert durch einen geschlossenen Weg  $w : [0, 1] \rightarrow X$  mit Anfangs- und Endpunkt  $w(0) = w(1) = x_0$ . Ein solcher Weg heißt **Schleife**.

Wir identifizieren zwei Wege, wenn es zwischen ihnen eine Homotopie gibt, die den Grundpunkt festlässt, also mit  $H(0, t) = H(1, t) = x_0$  für alle  $t \in I$ .

**Definition 2.2.2.** Für zwei Wege  $w', w''$  in  $X$  mit  $w'(1) = w''(0)$  definieren wir

$$w'' \star w'(t) := \begin{cases} w'(2t) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ w''(2t - 1) & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

**Satz 2.2.3.** Die Menge  $\pi_1(X, x_0)$  trägt die natürliche Struktur einer Gruppe.

Für den Beweis brauchen wir den folgenden nützlichen Trick.

**Lemma 2.2.4.** Sei  $\varphi : I \rightarrow I$  stetig und  $\varphi(0) = 0$  und  $\varphi(1) = 1$ . Dann gilt für jeden Weg  $f : I \rightarrow X$ , dass  $f \circ \varphi \simeq f$ .

Wir nennen in der Situation des Lemmas  $f \circ \varphi$  eine **Reparametrisierung** von  $f$ .

*Beweis.* Es gibt die Homotopie

$$H(s, t) := f((1 - t)\varphi(s) + ts) ,$$

für die gilt  $H(s, 0) = f(\varphi(s))$  und  $H(s, 1) = f(s)$ . Der Ausdruck ist wohldefiniert, denn  $(1 - t)\varphi(s) + ts$  liegt zwischen  $\varphi(s)$  und  $s$ , also in  $I$ .  $\square$

*Beweis von Satz 2.2.3.* Wähle Repräsentanten  $[w'], [w''] \in \pi_1(X, x_0)$  und setze  $[w''] \cdot [w'] := [w'' \star w']$  mit Definition 2.2.2. Dies ist wohldefiniert, denn aus einer Homotopie  $H'$  von  $w'$  nach  $v'$  und einer Homotopie  $H''$  von  $w''$  nach  $v''$  konstruieren wir eine Homotopie  $H'' \star H'$  von  $w'' \star w'$  nach  $v'' \star v'$ . Wir definieren

$$H'' \star H'(s, t) = \begin{cases} H''(s, 2t) & \text{für } t \leq \frac{1}{2} \\ H'(s, 2t - 1) & \text{für } t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ein neutrales Element ist gegeben durch den konstanten Weg in  $x_0$ , also  $c_{x_0}(t) = x_0$  für alle  $t \in I$ . Es ist

$$w \star c_{x_0} \simeq w \simeq c_{x_0} \star w .$$

dank Lemma 2.2.4. Zum Beispiel folgt  $c_{x_0} \star w \simeq w$  aus der Reparametrisierung

$$\varphi(s) := \begin{cases} 2s & \text{für } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{für } s \geq \frac{1}{2} \end{cases} ,$$

denn  $w \circ \varphi(s) = c_{x_0} \star w$ .

Die Verknüpfung ist assoziativ auf Homotopieklassen; es gilt

$$(w' \star w'') \star w''' \simeq w' \star (w'' \star w''') .$$

Wir verwenden wieder eine Reparametrisierung:

$$\varphi(s) := \begin{cases} 2s & \text{für } 0 \leq s \leq \frac{1}{4} \\ s + \frac{1}{4} & \text{für } \frac{1}{4} \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}s + \frac{1}{2} & \text{für } s \geq \frac{1}{2} \end{cases},$$

Für einen Weg  $w$  ist  $\bar{w}(t) := w(1-t)$  ein Repräsentant des Inversen,  $[w]^{-1} = [\bar{w}]$ . Eine Homotopie von  $\bar{w} \star w$  nach  $c_{x_0}$  ist explizit gegeben durch

$$H(x, t) := \begin{cases} w(2x) & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{t}{2} \\ w(t) = \bar{w}(1-t) & \text{für } \frac{t}{2} \leq x \leq 1 - \frac{t}{2} \\ \bar{w}(2x-1) & \text{für } 1 - \frac{t}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Damit formen die Elemente von  $\pi_1(X, x_0)$  eine Gruppe.  $\square$

Man die Homotopien in diesem Beispiel auch explizit skizzieren.

**Bemerkung 2.2.5.** Die Fundamentalgruppe ist im Allgemeinen nicht abelsch. Wir werden in Korollar 2.7.9 und Beispiel 2.7.10 konkrete Beispiele sehen.

**Definition 2.2.6.** Die Kategorie  $\mathbf{Top}_*$  hat als Objekte alle topologischen Räume mit Grundpunkt  $(X, x_0)$  (auch punktierte topologische Räume oder topologische Räume mit Basispunkt genannt), und  $\text{Hom}_{\mathbf{Top}_*}((X, x_0), (Y, y_0))$  besteht genau aus den stetigen Abbildungen  $f$ , für die  $f(x_0) = y_0$  ist.

Wir definieren auch  $\mathbf{hTop}_*$  als Kategorie mit den gleichen Objekten wie  $\mathbf{Top}_*$  und  $\text{Hom}_{\mathbf{hTop}_*}((X, x_0), (Y, y_0)) = [X, x_0; Y, y_0]$  besteht genau aus den Homotopieklassen von Abbildungen relativ zu  $x_0$ .

Mit dieser Definition gilt auch

$$\pi_1(X, x_0) \cong \text{Hom}_{\mathbf{hTop}_*}((\mathbb{S}^1, 1), (X, x_0))$$

wobei wir  $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$  auffassen und als Grundpunkt  $1 \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$  wählen.

**Satz 2.2.7.** Die Fundamentalgruppe definiert einen Funktor  $\pi_1 : \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Group}$ , wobei wir für jede stetige Abbildung  $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  definieren

$$\begin{aligned} \pi_1(f) = f_* : \pi_1(X, x_0) &\rightarrow \pi_1(Y, y_0) \\ [w] &\mapsto [f \circ w] \end{aligned}$$

Diese Konstruktion definiert auch einen Funktor  $\pi_1 : \mathbf{hTop}_* \rightarrow \mathbf{Group}$ .

*Beweis.* Sei  $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  gegeben. Zuerst einmal ist  $f_*$  wohldefiniert wegen Lemma 2.1.5, vgl. auch Korollar 2.1.7.

Wir zeigen, dass  $f_*$  ein Gruppenhomomorphismus ist. Für die Identität gilt  $f_*[c_{x_0}] = [f \circ c_{x_0}] = [c_{y_0}]$ . Für die Verknüpfung gilt

$$f_*[w \star w'] = [f \circ (w \star w')] = [(f \circ w) \star (f \circ w')].$$

Ist auch  $g : (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$  gegeben dann gilt  $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$  per Definition. Außerdem ist  $\text{id}_* = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)}$ . Also ist  $\pi_1$  ein Funktor.

Um zu zeigen, dass  $\pi_1$  auch einen Funktor auf  $\mathbf{hTop}_*$  definiert, nehmen wir an  $f \simeq g$ . Es folgt mit Lemma 2.1.5, dass  $f \circ w \simeq g \circ w$  und damit  $f_* = g_*$ .  $\square$

Da jeder Funktor Isomorphismen auf Isomorphismen abbildet, haben wir:

**Korollar 2.2.8.** *Sind zwei Räume mit Grundpunkt homotopieäquivalent,  $(X, x_0) \simeq (Y, y_0)$ , so sind ihre Fundamentalgruppen isomorph,  $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Y, y_0)$ .*

*Ist insbesondere  $(X, x_0)$  zusammenziehbar, so ist die Fundamentalgruppe trivial,  $\pi_1(X, x_0) = 1$ .*

**Bemerkungen 2.2.9.**

1. Die Umkehrung gilt aber nicht: wir werden später in Korollar 2.7.1.2 sehen, dass  $\pi_1(\mathbb{S}^2, *) = 1$  gilt, aber  $\mathbb{S}^2$  nicht zusammenziehbar ist.
2. Ist  $X \subset \mathbb{R}^n$  **sternförmig** bezüglich  $x_0 \in X$ , d.h. für jeden Punkt  $p \in X$  ist die Verbindungsstrecke  $\overline{px_0} = \{(1-t)p + tx_0 \mid 0 \leq t \leq 1\}$  in  $X$  enthalten, so ist  $X$  zusammenziehbar: Dazu betrachte die Homotopie

$$H(p, t) = (1-t)p + tx_0$$

von  $H_0 = \text{id}_X$  auf die konstante Abbildung  $c_{x_0}$ . Also ist die Fundamentalgruppe eines sternförmigen Raumes trivial,  $\pi_1(X, x_0) = 1$ .

3. Für einen Deformationsretrakt (vgl. Definition 2.1.12)  $\iota : A \rightarrow X$  induziert  $\iota$  für jeden Punkt  $a \in A$  einen Isomorphismus  $\iota_* : \pi_1(A, a) \xrightarrow{\cong} \pi_1(X, a)$ .
4. Es gilt auch die folgende Stärkung von Korollar 2.2.8: Seien  $X$  und  $Y$  homotopieäquivalent und  $x_0 \in X$  und  $y_0 \in Y$  beliebige Punkte. Dann ist  $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Y, y_0)$ . Für einen Beweis siehe z.B. Proposition 1.18 in Hatcher.

**Definition 2.2.10.** Ein Raum heißt **einfach zusammenhängend**, falls er wegzusammenhängend ist und jeder geschlossene Weg nullhomotop ist.

Ein wegzusammenhängender Raum ist genau dann einfach zusammenhängend, wenn seine Fundamentalgruppe (für irgendeinen Grundpunkt) trivial ist. Das folgt aus Übung 9.5.

Insbesondere sind zusammenziehbare Räume einfach zusammenhängend.

**Satz 2.2.11** (Fundamentalgruppe von Produkten). *Es gilt*

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0) .$$

*Beweis.* Siehe Übungsblatt 9. □

Da wir noch keine nicht-trivialen Beispiele für Fundamentalgruppen kennen, müssen wir mit Beispielen noch bis zum nächsten Abschnitt warten.

Wir diskutieren noch die Abhängigkeit der Fundamentalgruppe von der Wahl des Grundpunkts.

**Satz 2.2.12.** *Sei  $X$  wegzusammenhängend,  $x_1, x_2 \in X$ . Dann induziert jeder Weg  $\alpha$  von  $x_1$  nach  $x_2$  einen Isomorphismus  $\alpha^\# : \pi_1(X, x_1) \cong \pi_1(X, x_2)$  durch Konjugation  $[w] \mapsto [\alpha \star w \star \bar{\alpha}]$ .*

*Beweis.* Wir leiten den Satz aus einigen nützlichen Eigenschaften der Konstruktion  $\alpha \rightarrow \alpha^\#$  her.

Sind zwei Wege  $\alpha_1, \alpha_2$  von  $x_1$  nach  $x_2$  homotop relativ zu  $(x_1, x_2)$ , so induzieren sie die gleichen Abbildungen,  $\alpha_1^\# = \alpha_2^\#$ . Hierzu verwenden wir, dass die Aneinanderhängungen von homotopen Schleifen wieder homotop zueinander sind, vgl. den Beweis von 2.2.3.

Gegeben drei Punkte  $x_1, x_2, x_3$  und Wege  $\alpha$  von  $x_1$  nach  $x_2$  und  $\beta$  von  $x_2$  nach  $x_3$ , so gilt

$$\beta^\# \circ \alpha^\# = (\beta \star \alpha)^\#$$

Es folgt hieraus, dass  $\alpha^\#$  und  $(\bar{\alpha})^\#$  invers zueinander sind. Außerdem sieht man, dass  $\alpha^\#$  ein Homomorphismus ist.  $\square$

Man beachte auch den Spezialfall  $x_1 = x_2$ . Dann ist  $\alpha$  ein geschlossener Weg, der aber nicht unbedingt nullhomotop ist. Dann gilt

$$\alpha^\#([w]) = [\alpha]^{-1} \cdot [w] \cdot [\alpha] .$$

Die Konjugation mit der Klasse von  $\alpha$  ist ein innerer Automorphismus der Gruppe  $\pi_1(X, x_0)$ .

## 2.3 Fundamentalgruppe des Kreises

Es ist nun an der Zeit, eine nicht-triviale Fundamentalgruppe zu berechnen.

Wir stellen uns  $\mathbb{R}$  als eine Spirale vor, die über  $\mathbb{S}^1$  liegt. Die Idee ist es nun, die Schleifen in  $\mathbb{S}^1$  nach  $\mathbb{R}$  hochzuheben, und sie gewissermaßen abzurollen.

Wir benutzen hierzu die Identifikation von  $\mathbb{S}^1$  mit dem Quotienten  $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \{[x] \in \mathbb{R} \mid x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}\}$  via  $\exp(2\pi i -) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ . Wir schreiben in diesem Abschnitt also  $\mathbb{S}^1$  für  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  (und nicht wie gewöhnlich für den Unterraum von  $\mathbb{C}$ ). Wir bezeichnen die Projektion  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  mit  $E$  und wählen  $[0]$  als Grundpunkt von  $\mathbb{S}^1$ .

Wir betrachten die offenen Mengen

$$U^+ := \mathbb{S}^1 \setminus \{[1/2]\} \quad \text{und} \quad U^- := \mathbb{S}^1 \setminus \{[0]\}$$

und werden  $z \in U^+$  eindeutig als eine Zahl in  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  repräsentieren und  $z \in U^-$  als Zahl in  $(0, 1)$ . Dann haben wir lokale Inverse von  $E$ :

$$L_n^+ : U^+ \rightarrow \mathbb{R} \quad z \mapsto z + n$$

und

$$L_n^- : U^- \rightarrow \mathbb{R} \quad z \mapsto z + n,$$

und es gilt

$$E(L_n^\pm(z)) = z, \quad L_n^+([0]) = n, \quad L_n^-([1/2]) = n + \frac{1}{2}.$$

Der Bildbereich von  $L_n^+$  ist also das offene Intervall  $(n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2})$ , der Bildbereich von  $L_n^-$  ist  $(n, n + 1)$ . Zusammen überdecken die offenen Intervalle  $\mathbb{R}$ . Jeder Punkt  $x \in \mathbb{R}$  liegt in höchstens einem Bildbereich einer Funktion  $L_n^+$  und in höchstens einem Bildbereich einer Funktion  $L_n^-$ .

**Bemerkung 2.3.1.** Mann kann auch  $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$  mit den ausgezeichneten Punkten  $-1$  und  $+1$  betrachten und verschiedene Zweige des Logarithmus verwenden, um lokale Inverse für die Exponentialfunktion zu finden.

**Satz 2.3.2.** *Für jeden geschlossenen stetigen Weg*

$$w : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$$

mit  $w(0) = w(1) = 1$  gibt es eine eindeutige stetige Hochhebung

$$\tilde{w} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

mit Anfangspunkt  $\tilde{w}(0) = 0$ . Eine Hochhebung ist eine stetige Funktion  $\tilde{w}$  mit  $E \circ \tilde{w} = w$ .

Es gilt wegen  $E(\tilde{w}(1)) = w(1) = 1$  für jede Hochhebung  $\tilde{w}(1) \in \mathbb{Z}$ .

*Beweis.* Wir erinnern an das Lebesguesche Lemma, vgl. auch Anhang, Lemma A.2.1: Sei  $K \subset \mathbb{R}^n$  kompakt und  $(U_j)_{j \in I}$  eine offene Überdeckung von  $K$ . Dann gibt es eine positive Zahl  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ , die Lebesguesche Zahl der Überdeckung, so dass jede zu  $K$  nicht disjunkte Teilmenge  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ , die einen Durchmesser  $\leq \lambda$  hat, ganz in einer der offenen Teilmengen  $U_j$  enthalten ist.

Für den Weg  $w : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$  ist  $w^{-1}(U^\pm) =: V_\pm$  eine offene Überdeckung des kompakten Intervalls  $[0, 1]$ , wobei die Mengen  $V_\pm$  im Allgemeinen nicht zusammenhängend sind. Man kann eine Lebesguesche Zahl  $\frac{1}{N}$  wählen, so dass jedes der Intervalle  $T_k := [\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N}]$  entweder ganz in  $V_+$  oder in  $V_-$  enthalten ist und  $w_k := w|_{T_k}$  ein Weg in  $U_+$  oder  $U_-$  ist.

Wir liften nun induktiv: wegen  $w(0) = [0]$  ist  $w(T_1) \subset U_+$ . Wir setzen  $\tilde{w}(s) = L_0^+(w(s))$  für alle  $s \in T_1$ . Angenommen, wir haben eine Hochhebung  $\tilde{w} : [0, \frac{k}{N}] \rightarrow \mathbb{R}$  gefunden. Das Bild des nächsten Intervalls liege  $w(T_{k+1}) \subset U^\epsilon$ , wobei  $\epsilon \in \{+1, -1\}$ . Dann liegt der Punkt  $\tilde{w}(\frac{k}{N})$  im Bildbereich einer Funktion  $L_n^\epsilon$  für genau ein  $n$ . Dieses  $L_n^\epsilon$  benutzen wir zur weiteren Fortsetzung.

Die so konstruierte Hochhebung ist eindeutig. Denn die Differenz  $\tilde{w} - \tilde{w}'$  zweier Hochhebungen ist stetig und nimmt nur ganzzahlige Werte an, da  $E(\tilde{w}) = E(\tilde{w}')$ . Also muss  $\tilde{w} - \tilde{w}'$  konstant sein. Aus der Anfangsbedingung  $\tilde{w}(0) = 1 = \tilde{w}'(0)$  folgt die Gleichheit  $\tilde{w} = \tilde{w}'$ .  $\square$

**Definition 2.3.3.** Für einen geschlossenen Weg  $w : I \rightarrow \mathbb{S}^1$  heißt die ganze Zahl  $\tilde{w}(1) \in \mathbb{Z}$  der **Grad** des Weges  $w$ .

**Satz 2.3.4.** *Der Grad eines geschlossenen Wegs hängt nur von seiner Homotopieklasse ab. Es gibt einen Isomorphismus von Gruppen*

$$\text{grad} : \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \rightarrow \mathbb{Z} .$$

*Beweis.* Seien  $w', w'' : I \rightarrow \mathbb{S}^1$  geschlossene Wege. Nach Satz 2.3.2 gibt es eindeutige Hochhebungen  $\tilde{w}', \tilde{w}'' : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann ist mithilfe der Addition in  $\mathbb{R}$

$$(\tilde{w}'' + \tilde{w}'(1)) \star \tilde{w}'$$

eine Hochhebung des Weges  $w'' \star w'$ , denn  $E((\tilde{w}'' + \tilde{w}'(1)) \star \tilde{w}') = E(\tilde{w}'') \star E(\tilde{w}') = w'' \star w'$ . Somit ist  $\text{grad}(w'' \star w') = w''(1) + w'(1) = \text{grad } w'' + \text{grad } w'$ .

Für  $n \in \mathbb{Z}$  hat der Weg  $w_n(s) = [ns]$  (oder  $s \mapsto \exp(2\pi ins)$  für  $S^1 \subset \mathbb{C}$ ) die offensichtlicher Hochhebung  $\tilde{w}_n(s) = ns$  und daher  $\text{grad } w_n = \tilde{w}_n(1) = n$ . Die Abbildung  $\text{grad}$  ist also surjektiv.

Als nächstes zeigen wir, dass die Abbildung  $\text{grad}$  wohldefiniert auf Homotopieklassen ist, d.h. homotope Wege  $w_1, w_2$  haben gleichen Grad.

Sei dazu  $H : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$  eine Homotopie von  $w$  nach  $w'$ . Wieder wählen wir eine Lebesguesche Zahl  $\frac{1}{N}$  für die Zusammenhangskomponenten von  $H^{-1}(U^\pm) = W^\pm \subset [0, 1]^2$  und zerlegen das große Quadrat  $[0, 1]^2$  in kleine Quadrate  $T_{p,q} := [\frac{p-1}{N}, \frac{p}{N}] \times [\frac{q-1}{N}, \frac{q}{N}]$ , auf denen mindestens ein Zweig von  $L_n^\epsilon$  wohldefiniert ist.

Auf dem kleinen Quadrat  $T_{1,1}$  setze wegen  $H(0, 0) = [0]$

$$\tilde{H}|_{T_{1,1}} := L_0^+ \circ H|_{T_{1,1}} .$$

Auf den angrenzenden Quadraten  $T_{2,1} = [\frac{1}{N}, \frac{2}{N}] \times [0, \frac{1}{N}]$  und auf  $T_{1,2} = [0, \frac{1}{N}] \times [\frac{1}{N}, \frac{2}{N}]$  setze fort wie im Beweis von Satz 2.3.2.

Wir können nun auf  $T_{2,2}$  entweder vom Quadrat  $T_{1,2}$  oder von  $T_{2,1}$  aus fortsetzen und erhalten zwei Hochhebungen. Diese stimmen aber im Eckpunkt  $(\frac{1}{N}, \frac{1}{N})$  überein und müssen daher denselben Zweig  $L_n^\epsilon$  benutzen. Diese Prozedur setzt man nun fort.

Diese Hochhebung ist eindeutig, denn die Differenz  $\tilde{H} - \tilde{H}'$  zweier Hochhebungen ist stetig und nimmt nur ganzzahlige Werte an, muss also konstant sein. Aus  $\tilde{H}(0, 0) = [0] = \tilde{H}'(0, 0)$  folgt die Gleichheit.

Weil  $\tilde{H}(0, t)$  stetig ist und wegen  $[0] = H(0, t) = E(\tilde{H}(0, t))$  Werte in  $\mathbb{Z}$  annehmen muss, gilt  $\tilde{H}(0, t) = [0]$  für alle  $t \in I$ . Ebenso ist die Funktion  $\tilde{H}(1, t)$  stetig und muss Werte in  $\mathbb{Z}$  annehmen. Beide Funktionen sind also konstant und somit ist

$$\tilde{w}(1) = \tilde{H}(1, 0) = \tilde{H}(1, 1) = \tilde{w}'(1) .$$

Schließlich zeigen wir, dass die Gradabbildung injektiv ist. Sei dazu  $w : I \rightarrow \mathbb{S}^1$  ein Weg mit  $\text{grad } w = 0$ , der also eine Hochhebung  $\tilde{w} : I \rightarrow \mathbb{R}$  hat mit  $\tilde{w}(1) = 0$ ; der Weg  $\tilde{w}$  ist also geschlossen. Dann ist

$$K(s, t) = (1 - t)\tilde{w}(s) + t\tilde{w}(1)$$

eine Homotopie von  $\tilde{w}$  zum konstanten Weg  $c_{\tilde{w}(1)} = c_0$ , und für alle  $t \in I$  gilt  $K(0, t) = 0 = K(1, t)$ . Dann ist das Bild  $E \circ K$  eine Homotopie von  $w$  zum konstanten Weg  $c_{[0]}$ .  $\square$

## 2.4 Anwendungen

Wir betrachten nun Anwendungen des Isomorphismus  $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \cong \mathbb{Z}$ .

**Korollar 2.4.1.** *Der Raum  $(\mathbb{S}^1, 1)$  ist nicht zusammenziehbar.*

*Beweis.* Nach Korollar 2.2.8 gilt für einen zusammenziehbaren Raum  $\pi_1(X, x) \cong 1$  und nach Satz 2.3.4 ist  $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \cong \mathbb{Z}$ .  $\square$

Auch ohne Grundpunkt ist  $\mathbb{S}^1$  nicht zusammenziehbar, wir werden später sehen, wieso.



**Beispiel 2.4.2.** Nach Satz 2.2.11 gilt für Tori und irgendeinen Grundpunkt  $*$

$$\pi_1(T^n, *) \cong \pi_1(\underbrace{\mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1}_{n\text{-mal}}, *) \cong \mathbb{Z}^n .$$

Also sind auch Tori (für  $n \geq 1$ ) nicht zusammenziehbar.

**Satz 2.4.3** (Brouwerscher Fixpunktsatz). *Jede stetige Abbildung  $f : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$  hat mindestens einen Fixpunkt.*

*Beweis 1.* Angenommen, es gilt  $f(z) \neq z$  für alle  $z \in \mathbb{D}^2$ . Dann definiere eine Abbildung

$$r : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1 ,$$

indem  $z \in \mathbb{D}^2$  der Schnittpunkt der Halbgeraden von  $f(z)$  nach  $z$  mit  $\mathbb{S}^1$  zugeordnet wird. Die Abbildung ist stetig und es gilt  $r(z) = z$  für  $z \in \mathbb{S}^1$ .

Dann ist  $H(t, z) := z + tr(z) - z$  für  $t \in I$  und  $z \in \mathbb{S}^1$  eine Homotopie relativ zu  $\mathbb{S}^1$  von der konstanten Abbildung  $H(0, z) = r(0) \in \mathbb{S}^1$  auf  $H_1 = \text{id}_{\mathbb{S}^1}$ . Bildlich gesprochen ist  $H_t$  die Abbildung, die  $z$  nur einen Anteil  $t$  des Weges entlang der Halbgeraden durch  $f(z)$  und  $z$  zum Rand schickt. Also ist  $\mathbb{S}^1$  ein starker Deformationsretrakt von  $\mathbb{D}^2$  und damit insbesondere zusammenziehbar, im Widerspruch zu Korollar 2.4.1.  $\square$

*Beweis 2.* Wie zuvor nehmen wir ein Gegenbeispiel an und konstruieren  $r : (\mathbb{D}^2, 1) \rightarrow (\mathbb{S}^1, 1)$ . Für die Einbettung  $\iota : (\mathbb{S}^1, 1) \rightarrow (\mathbb{D}^2, 1)$  ist dann  $r \circ \iota : (\mathbb{S}^1, 1) \rightarrow (\mathbb{S}^1, 1)$  die Identität. Wir wenden den Funktor  $\pi_1$  an und erhalten das Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{\text{id}_{\mathbb{Z}}} & \mathbb{Z} \\ & \searrow \iota_* & \nearrow r_* \\ & 1 & \end{array}$$

was genau aussagt

$$r_* \circ \iota_* = (r \circ \iota)_* = (\text{id}_{\mathbb{S}^1})_* = \text{id}_{\mathbb{Z}}$$

. Also faktorisiert die Identitätsabbildung auf  $\mathbb{Z}$  durch die trivial Gruppe  $1 = \pi_1(\mathbb{D}^2, 1)$ . Das ist ein Widerspruch: Man betrachte zum Beispiel  $1 \in \mathbb{Z}$ . Dann gilt  $1 = \text{id}_{\mathbb{Z}}(1) = r_* \iota_*(1) = r_*(e_1) = e_{\mathbb{Z}} = 0$ , wo wir  $e_G$  für die Einheit in der Gruppe  $G$  schreiben.  $\square$

Der Brouwersche Fixpunktsatz gilt übrigens für Kreisscheiben  $\mathbb{D}^n$  beliebiger Dimension  $n$ . Im Falle  $n = 1$  ist er äquivalent zum klassischen Zwischenwertsatz 1.14.4. Denn betrachte für eine stetige Funktion  $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$  die ebenfalls stetige Funktion  $g(x) := f(x) - x$ . Dann ist  $g(1) = f(1) - 1 \leq 1 - 1 = 0$  und  $g(-1) = f(-1) + 1 \geq -1 + 1 = 0$ . Der Wert 0 wird von der Funktion  $g$  genau dann angenommen, wenn die Funktion  $f$  einen Fixpunkt besitzt.

Für die nächsten Anwendungen erweitern wir die Definition des Grades.

**Definition 2.4.4.** Sei  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  eine beliebige stetige Abbildung. Betrachte den Weg in  $\mathbb{S}^1$

$$w_f : \begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{S}^1 \\ t \mapsto f(\exp(2\pi it)) . \end{array}$$

Sei  $\tilde{w}_f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine beliebige Hochhebung des Wegs  $w_f$ , d.h.

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{R} \\ & \nearrow \tilde{w}_f & \downarrow E \\ I & \xrightarrow{w_f} & \mathbb{S}^1 \end{array}$$

Dann ist der Grad von  $f$  definiert als

$$\text{grad}(f) := \tilde{w}_f(1) - \tilde{w}_f(0) .$$

**Beispiel 2.4.5.** Die Abbildung  $z \mapsto z^n$  hat Grad  $n$ , denn  $w_f : t \mapsto \exp(2\pi i n t)$  hat die Hochhebung  $t \mapsto n t$ .

**Satz 2.4.6.** Die Abbildung  $f \mapsto \text{grad}(f)$  definiert eine Bijektion von  $[\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1]$  nach  $\mathbb{Z}$ .

*Beweis.* Zur Wohldefiniertheit müssen wir zeigen, dass der Grad nicht von der Wahl der Hochhebung  $\tilde{w}_f$  abhängt. Aber wie im Beweis von Satz 2.3.3 legt die Wahl des Anfangspunkts  $\tilde{w}_f(0)$  die Hochhebung eindeutig fest.

Es ist  $w_f(0) = f(1)$  und  $w_f(1) = f(e^{2\pi i}) = f(1)$ . Daher ist  $\text{grad}(f) \in \mathbb{Z}$ .

Homotope Abbildungen  $f, g$  haben den gleichen Grad. Wieder gilt der gleiche Beweis wie in Satz 2.3.3, wir müssen allerdings berücksichtigen, dass  $f$  und  $g$  unterschiedliche Anfangspunkte haben können. Sei also  $f(0) \neq g(0)$  dann gilt  $f(0) = \exp(2\pi i \theta) g(0)$  für irgendein  $\theta$ . Man sieht, dass  $f$  und  $\exp(2\pi i \theta) f$  den gleichen Grad haben (Anfangspunkt und Endpunkt der Hochhebungen unterscheiden sich um  $\theta$ ). Also haben auch  $f$  und  $g$  den gleichen Grad, da  $g$  und  $\exp(2\pi i \theta) f$  homotope Abbildungen mit gleichem Anfangspunkt sind.

Das Beispiel  $z \mapsto z^n$  zeigt, dass der Grad surjektiv ist. Wenn  $f$  Grad null hat, dann ist  $\tilde{w}_f$  eine Schleife in  $\mathbb{R}$ . Da  $\mathbb{R}$  zusammenziehbar ist, gibt es eine Homotopie von  $\tilde{w}_f$  nach  $c_{\tilde{w}_f(0)}$ . Wir wenden  $E$  an um eine Homotopie von  $w_f$  nach  $c_{w_f(0)}$  zu erhalten.  $\square$

Wäre  $S^1$  zusammenziehbar dann hätten wir nach Korollar 2.1.11  $[S^1, S^1] \cong *$ , im Widerspruch zu Satz 2.4.6. Also ist  $S^1$  (auch ohne Grundpunkt) nicht zusammenziehbar.

Wir diskutieren nun weitere Anwendungen des Abbildungsgrades:

**Satz 2.4.7** (Fundamentalsatz der Algebra). Jedes Polynom

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n$$

mit Grad  $n > 0$  und  $a_i \in \mathbb{C}$  hat eine Nullstelle in  $\mathbb{C}$ .

*Beweis.* Wir setzen

$$s := |a_0| + \dots + |a_{n-1}| + 1 \geq 1 .$$

Wir schätzen für  $z \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$  ab:

$$\begin{aligned} |f(sz) - s^n z^n| &= |a_0 + a_1 s z + \dots + a_{n-1} s^{n-1} z^{n-1}| \\ &\leq |a_0| + |a_1| s + \dots + |a_{n-1}| s^{n-1} \quad [\text{Dreiecksungleichung}] \\ &\leq s^{n-1} (|a_0| + |a_1| + \dots + |a_{n-1}|) \quad [\text{da } |s| \geq 1] \\ &< s^n = |s^n z^n| , \end{aligned}$$

da der Ausdruck in der letzten Klammer gleich  $s - 1$  ist. Damit liegt  $f(sz)$  im Innern eines Kreises vom Radius  $|s^n z^n|$  um den Punkt  $s^n z^n$ .

Die Strecke von  $f(sz)$  nach  $s^n z^n$  enthält daher den Nullpunkt nicht. Damit ist

$$H : \mathbb{S}^1 \times I \rightarrow \mathbb{C}^* \\ (z, t) \mapsto (1-t)f(sz) + t(s^n z^n)$$

eine Homotopie in  $\mathbb{C}^*$  von  $z \mapsto f(sz)$  nach  $z \mapsto s^n z^n$ .

Wir nehmen nun an, dass  $f$  keine Nullstellen hat. Dann ist  $z \mapsto f(sz)$  innerhalb von  $\mathbb{C}^*$  mittels

$$H(t, z) = f((1-t)sz)$$

nullhomotop und daher muss  $z \mapsto s^n z^n$  ebenfalls nullhomotop sein. Wir schalten die stetige Abbildung

$$\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{S}^1 \\ z \mapsto \frac{z}{\|z\|}$$

nach. Dann ist auch die Abbildung

$$g : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1 \\ z \mapsto \frac{s^n z^n}{|s^n z^n|} = z^n$$

nullhomotop, im Widerspruch zu  $\text{grad}(g) = n > 0$ , siehe Satz 2.4.6 □

Für das nächste wichtige Resultat brauchen wir die Aussage des folgenden Satzes:

**Satz 2.4.8.** *Eine Abbildung  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  heißt antiperiodisch, wenn  $f(-z) = -f(z)$  für alle  $z \in \mathbb{S}^1$  gilt. Eine antiperiodische Abbildung hat ungeraden Grad.*

*Beweis.* Sei  $w(t) := f(\exp(2\pi i t))$  und  $\tilde{w} : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Hochhebung von  $w$ . Dann gilt für  $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$

$$E \circ \tilde{w}(t + \frac{1}{2}) = w(t + \frac{1}{2}) = f(\exp(2\pi i(t + \frac{1}{2}))) = f(-\exp(2\pi i t)) \\ = -f(\exp(2\pi i t)) = -E \circ \tilde{w}(t)$$

und damit sind  $E(\tilde{w}(t + \frac{1}{2}))$  und  $E(\tilde{w}(t))$  antipode Punkte. Also beträgt der Winkel zwischen den beiden Punkten  $\pi$ . Da  $E$  ein Homomorphismus von  $(\mathbb{R}, +)$  nach  $(\mathbb{S}^1, \cdot)$  ist und  $E(\frac{1}{2}) = e^{\pi i}$  gilt, haben wir

$$E \left( \tilde{w}(t + \frac{1}{2}) - \tilde{w}(t) - \frac{1}{2} \right) = E(\tilde{w}(t + \frac{1}{2})) E(\tilde{w}(t))^{-1} E(\frac{1}{2})^{-1} = 1$$

und

$$N(t) := \tilde{w}(t + \frac{1}{2}) - \tilde{w}(t) - \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}.$$

Die Funktion  $N$  ist stetig, also konstant,  $N(t) = N$  für alle  $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ . Damit folgt

$$\text{grad}(f) = \tilde{w}(1) - \tilde{w}(0) = \tilde{w}(1) - \tilde{w}(\frac{1}{2}) + \tilde{w}(\frac{1}{2}) - \tilde{w}(0) = \frac{1}{2} + N + \frac{1}{2} + N \in 2\mathbb{Z} + 1.$$

□

**Satz 2.4.9** (Satz von Borsuk-Ulam). Sei  $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine stetige Abbildung. Dann gibt es einen Punkt  $x \in \mathbb{S}^2$  mit  $f(x) = f(-x)$ .

**Korollar 2.4.10.** Es gibt keine stetige Injektion von  $\mathbb{S}^2$  nach  $\mathbb{R}^2$ .

Nimmt man an, dass Luftdruck und Temperatur stetige Funktionen auf der Erdoberfläche sind, so gibt es also zwei antipodale Punkte auf der Erde, die gleichen Luftdruck und gleiche Temperatur haben.

*Beweis.* Angenommen,  $f(x) \neq f(-x)$  für alle  $x \in \mathbb{S}^2$ . Dann ist die Funktion

$$\begin{aligned} \tilde{f} : \mathbb{S}^2 &\rightarrow \mathbb{S}^1 \\ x &\mapsto \frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|} \end{aligned}$$

wohldefiniert. Ihre Einschränkung auf den Äquator  $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{S}^2$  ist antiperiodisch und hat nach Satz 2.4.8 ungeraden Grad.

Andererseits definiert  $\tilde{f}$  eine Funktion  $\tilde{g}$  auf der oberen Hemisphäre  $\mathbb{D}^2 \subset \mathbb{S}^2$

$$\begin{aligned} \tilde{g} : \mathbb{D}^2 &\rightarrow \mathbb{S}^1 \\ (x_1, x_2) &\mapsto \tilde{f}(x_1, x_2, \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}) \end{aligned}$$

Die Funktion stimmt auf dem Rand von  $\mathbb{D}^2$  mit der Einschränkung von  $\tilde{f}$  überein. Aber diese Funktion ist nullhomotop, wie die Homotopie

$$\begin{aligned} H : \mathbb{S}^1 \times I &\rightarrow \mathbb{S}^1 \\ (z, t) &\mapsto \tilde{g}(tz) \end{aligned}$$

zeigt, für die  $H_0$  konstant ist und  $H_1 = \tilde{g}|_{\mathbb{S}^1}$ . Dies ist ein Widerspruch.  $\square$

**Definition 2.4.11.** Sei  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  stetig und  $z \in \mathbb{R}^2 \setminus f(\mathbb{S}^1)$ . Der Grad der Abbildung

$$\begin{aligned} f_z : \mathbb{S}^1 &\rightarrow \mathbb{S}^1 \\ x &\mapsto \frac{f(x) - z}{\|f(x) - z\|} \end{aligned}$$

heißt **Umlaufzahl** oder **Windungszahl** des geschlossenen Wegs  $f$  bezüglich des Punktes  $z$ , und wird mit  $U(f, z) \in \mathbb{Z}$  bezeichnet.

Sie kennen die Umlaufzahl womöglich aus der Funktionentheorie, auf dem Übungsblatt können Sie die beiden Charakterisierungen vergleichen.

**Satz 2.4.12.** Liegen  $z'$  und  $z''$  in der gleichen Wegkomponente des Komplements  $\mathbb{R}^2 \setminus f(\mathbb{S}^1)$ , so gilt  $U(f, z) = U(f, z')$ .

*Beweis.* Ist  $w : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  ein Weg von  $z'$  nach  $z''$ , der das Bild  $f(\mathbb{S}^1)$  nicht trifft. Dann ist

$$H(x, t) = \frac{f(x) - w(t)}{\|f(x) - w(t)\|}$$

eine Homotopie von  $f_{z'}$  nach  $f_{z''}$ . Die Aussage folgt nun aus Satz 2.4.6, da homotope Abbildungen  $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  gleichen Grad haben.  $\square$

## 2.5 Satz von Seifert-van Kampen

Sei  $X$  ein wegzusammenhängender topologischer Raum,  $X = X_1 \cup X_2$  mit  $X_1$  und  $X_2$  offen in  $X$ , wobei  $X_1, X_2$  und  $X_1 \cap X_2$  wegzusammenhängend seien. Wähle einen Grundpunkt  $x_0 \in X_1 \cap X_2$ .

Unser Ziel ist es, die Fundamentalgruppe  $\pi_1(X, x_0)$  durch die Fundamentalgruppen  $\pi_1(X_1, x_0)$ ,  $\pi_1(X_2, x_0)$  und  $\pi_1(X_1 \cap X_2, x_0)$  auszudrücken. Nach Satz 2.2.7 bekommen wir aus dem Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X_1 \cap X_2 & \xrightarrow{\iota_1} & X_1 \\ \iota_2 \downarrow & & \downarrow \tilde{\iota}_1 \\ X_2 & \xrightarrow{\tilde{\iota}_2} & X_1 \cup X_2 \end{array}$$

von topologischen Räumen ein Diagramm von Fundamentalgruppen

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X_1 \cap X_2, x_0) & \xrightarrow{(\iota_1)_*} & \pi_1(X_1, x_0) \\ (\iota_2)_* \downarrow & & \downarrow (\tilde{\iota}_1)_* \\ \pi_1(X_2, x_0) & \xrightarrow{(\tilde{\iota}_2)_*} & \pi_1(X_1 \cup X_2, x_0) \end{array} \quad (1)$$

Idealerweise können wir  $\pi_1(X_1 \cup X_2, x_0)$  aus den drei gegebenen Fundamentalgruppen bestimmen.

**Theorem 2.5.1** (Seifert-van Kampen). *Sei  $X$  ein wegzusammenhängender topologischer Raum,  $X = X_1 \cup X_2$  mit  $X_1$  und  $X_2$  offen in  $X$  und  $X_0 := X_1 \cap X_2$ , wobei  $X_1, X_2$  und  $X_1 \cap X_2$  wegzusammenhängend seien. Wähle einen Grundpunkt  $x_0 \in X_1 \cap X_2$ . Dann ist das Diagramm (1)*

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X_1 \cap X_2, x_0) & \xrightarrow{(\iota_1)_*} & \pi_1(X_1, x_0) \\ (\iota_2)_* \downarrow & & \downarrow (\tilde{\iota}_1)_* \\ \pi_1(X_2, x_0) & \xrightarrow{(\tilde{\iota}_2)_*} & \pi_1(X_1 \cup X_2, x_0) \end{array}$$

ein *Pushout-Diagramm*.

Es gibt einen recht direkten, aber technisch involvierten Beweis für den Satz von Seifert-van Kampen, der sich in den meisten Referenzen findet.

Ich möchte stattdessen einen etwas indirekten, aber konzeptionell klaren Beweis zeigen, auf den wir aber warten müssen, bis wir deutlich mehr Theorie entwickelt haben.

Unser Beweis gilt nur für topologische Räume mit einigen gute Eigenschaften. Diese sind aber bei den Räumen, für die wir uns in der Homotopietheorie interessieren, fast immer gegeben.

## 2.6 Pushouts von Gruppen

Wir wollen nun Pushouts in Gruppen explizit verstehen.

Seien  $G_0, G_1$  und  $G_2$  Gruppen und  $i_1 : G_0 \rightarrow G_1$  und  $i_2 : G_0 \rightarrow G_2$  Homomorphismen. Der Pushout ist der Kolimes für das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} G_0 & \xrightarrow{i_1} & G_1 \\ i_2 \downarrow & & \\ G_2 & & \end{array}$$

Nach Definition 1.22.4 ist dies eine Gruppe  $G$  mit Gruppenhomomorphismen  $j_1, j_2$  so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} G_0 & \xrightarrow{i_1} & G_1 \\ i_2 \downarrow & & \downarrow j_1 \\ G_2 & \xrightarrow{j_2} & G \end{array}$$

kommutiert und  $G$  die folgende universelle Eigenschaft hat: zu jedem Paar von Homomorphismen

$$h_1 : G_1 \rightarrow H \quad \text{und} \quad h_2 : G_2 \rightarrow H$$

mit  $h_1 \circ i_1 = h_2 \circ i_2$  gibt es genau ein  $h : G \rightarrow H$  mit  $h \circ j_1 = h_1$  und  $h \circ j_2 = h_2$ . Als Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} G_0 & \xrightarrow{i_1} & G_1 \\ i_2 \downarrow & & \downarrow j_1 \\ G_2 & \xrightarrow{j_2} & G \end{array} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{h_1} \\ \exists! h \\ \xrightarrow{h_2} \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \\ H \end{array}$$

Als Kolimes ist der Pushout, wenn er existiert, eindeutig bis auf einen eindeutigen Isomorphismus.

Wir werden nun das sogenannte **amalgamierte freie Produkt**  $G_1 \star_{G_0} G_2$  konkret konstruieren und dann zeigen, dass es ein Kolimes in **Group** ist.

### Definition 2.6.1.

1. Sei  $G$  eine Gruppe und  $E \subset G$  eine Teilmenge. Der Durchschnitt aller Untergruppen von  $G$ , die die Teilmenge  $E$  enthalten, heißt die von  $E$  **erzeugte Untergruppe**  $\langle E \rangle$ .

Gilt  $\langle E \rangle = G$ , so heißt  $E$  ein **Erzeugendensystem** der Gruppe  $G$ . Wir sagen,  $E$  erzeuge  $G$ .

2. Sei  $G$  eine Gruppe und  $R \subset G$  eine Teilmenge. Der Durchschnitt aller Normalteiler von  $G$ , die die Teilmenge  $R$  enthalten, heißt der von  $R$  **erzeugte Normalteiler**  $\mathcal{N}(R)$ .

### Bemerkungen 2.6.2.

1. Erzeugt eine Teilmenge  $E \subset G$  die Gruppe  $G$ , so hat jedes Element  $g \in G$  mit  $g \neq 1$  eine Darstellung der Form

$$g = s_1^{i_1} \cdot \dots \cdot s_n^{i_n} \quad (2)$$

mit  $s_i \in E$  und  $i_k \in \mathbb{Z}$ .

2. Das Erzeugendensystem ist nicht eindeutig, z.B. ist  $G$  selbst ein Erzeugendensystem für  $G$ . Auch die Darstellung (2) ist nicht eindeutig; man kann zumindest immer Terme der Form  $s_i \cdot s_i^{-1}$  kürzen.
3.  $\mathcal{N}(E)$  besteht aus Elementen der Form 2 mit  $s_i \in R$ , ihren Konjugierten und den Produkten der Konjugierten.

**Definition 2.6.3.** Sei  $G$  eine Gruppe. Ein **Erzeugendensystem**  $E \subset G$  heißt **frei**, falls aus  $s_1^{i_1} \cdot \dots \cdot s_n^{i_n} = 1$  mit  $s_i \in E$  und  $i_k \in \{\pm 1\}$  folgt, dass es ein  $j \in \{1, \dots, n-1\}$  gibt mit  $s_j = s_{j+1}$  und  $i_j = -i_{j+1}$ . (Es gelten dann keine anderen Relationen als  $s_i s_i^{-1} = 1$ .)

Eine Gruppe  $G$  heißt **frei**, falls sie ein freies Erzeugendensystem  $E$  besitzt. Das Erzeugendensystem  $E$  legt die Gruppe fest; wir schreiben dann  $G = \mathcal{F}(E)$ .

Die Elemente von  $\mathcal{F}(E)$  sind genau alle Wörter in den Elementen von  $E$  und ihren Inversen, also alle  $e_{i_0} e_{i_1} \dots e_{i_n}$  mit  $e_i \in E$  oder  $e_i^{-1} \in E$  für alle  $i$ .

Wir werden mit dem Satz von Seifert-van Kampen sehen, dass die freie Gruppe über 2 Erzeugenden genau die Fundamentalgruppe des Bouquet's  $S^1 \vee S^1$  ist.

**Definition 2.6.4.** Sei  $E \neq \emptyset$  eine Menge und  $R \subset \mathcal{F}(E)$  eine Teilmenge der frei erzeugten Gruppe. Bezeichne mit  $\langle E, R \rangle = \mathcal{F}(E)/\mathcal{N}(R)$  die Faktorgruppe. Gilt  $G \cong \langle E, R \rangle$ , so sagen wir,  $G$  werde durch die **Erzeuger**  $E$  und die **Relationen**  $R$  beschrieben.  $\langle E, R \rangle$  heißt eine **Präsentierung** der Gruppe. Kann man für eine Gruppe  $G$  eine Präsentierung mit  $E, R$  endlichen Mengen finden, so heißt  $G$  **endlich präsentierbar**.

Für  $E = \{e_1, \dots, e_n\}$  und  $R = \{r_1, \dots, r_m\}$  schreiben wir auch  $\langle e_1, \dots, e_n \mid r_1, \dots, r_m \rangle$  für  $\langle E, R \rangle$

Die Gruppe  $\langle E, R \rangle$  hat als Elemente wieder alle Wörter in den Elementen von  $E$  und ihren Inversen, aber es gilt  $e_{i_0} e_{i_1} \dots e_{i_n} = e_{j_0} e_{j_1} \dots e_{j_n}$  wenn sich die beiden Wörter ineinander überführen lassen, indem man wiederholt Wörter aus  $R$  oder ihre Konjugierten streicht oder einfügt. (Es ist in der Regel extrem schwierig, zu bestimmen, ob das möglich ist!)

### Beispiele 2.6.5.

1. Es gilt  $\mathcal{F}(\emptyset) = \{1\}$ , vgl. Satz 2.6.6, und  $\mathcal{F}(\{*\}) = \mathbb{Z} = \langle \{t\}, \emptyset \rangle$ .
2. Die freie Gruppe  $\mathcal{F}(S) = \langle S, \emptyset \rangle$  mit  $|S| > 1$  ist nicht abelsch.
3. Die Gruppe  $\langle a \mid a^n \rangle$  mit Erzeuger  $E = \{a\}$  und Relation  $R = \{a^n\}$  ist die zyklische Gruppe  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Für  $n = 0$  erhalten wir wieder  $\mathbb{Z}$ .

Wird eine Gruppe von einem Element erzeugt, so heißt sie **zyklisch**.

4. Die freie abelsche Gruppe vom Rang 2 ist  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$ .

5. Jede Gruppe  $G$  hat eine Präsentation, denn das Ausmultiplizieren von Wörtern in  $G$  liefert einen surjektiven Gruppenhomomorphismus

$$\epsilon : \mathcal{F}(G) \rightarrow G ,$$

und der Normalteiler  $R := \ker \epsilon \subset \mathcal{F}(G)$  gibt die richtigen Relationen. Nützliche Präsentierungen zu finden kann dagegen sehr schwierig sein.

**Satz 2.6.6.** *Die freie Gruppe  $\mathcal{F}(E)$  auf einer Menge  $E$  hat die folgende universelle Eigenschaft: für jede Gruppe  $H$  gibt es einen natürlichen Isomorphismus*

$$\text{Hom}_{\mathbf{Group}}(\mathcal{F}(E), H) \cong \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(E, H) .$$

Daraus folgt sofort für  $E = \emptyset$ , dass  $\text{Hom}_{\mathbf{Group}}(\mathcal{F}(\emptyset), H) \cong \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(\emptyset, H)$ . Da es genau eine Abbildung aus der leeren Menge gibt, muss  $\mathcal{F}(\emptyset)$  die triviale Gruppe mit einem Element sein.

*Beweis.* Sei  $\iota : E \rightarrow \mathcal{F}(E)$  die natürliche Einbettung von Mengen. Gegeben  $f \in \text{Hom}_{\mathbf{Group}}(\mathcal{F}(E), H)$ , erhalte  $f \circ \iota \in \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(E, H)$ . Umgekehrt, gegeben  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(E, H)$ , definiere  $f : \mathcal{F}(E) \rightarrow G$  auf  $g = s_1^{i_1} \cdot \dots \cdot s_n^{i_n}$  durch

$$f(s_1^{i_1} \cdot \dots \cdot s_n^{i_n}) = \varphi(s_1)^{i_1} \cdot \dots \cdot \varphi(s_n)^{i_n} .$$

Da es in der freien Gruppe keine Relationen gibt, ist  $f$  wohldefiniert und eindeutig festgelegt. Man überlege sich, dass diese Abbildungen invers zu einander sind.  $\square$

**Bemerkung 2.6.7.** Die Konstruktion  $E \mapsto \mathcal{F}(E)$  lässt sich zu einem Funktor  $\mathcal{F} : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Group}$  erweitern. Jede Abbildung  $f : H \rightarrow G$  von Gruppen und jede Abbildung  $g : E \rightarrow F$  von Mengen induziert Abbildungen auf den Hom-Mengen, vgl. die Konstruktion aus Definition 2.1.6.

Das Adjektiv *natürlich* in Satz 2.6.6 bedeutet nun Folgendes: Die Diagramme

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathbf{Group}}(\mathcal{F}(E), H) & \xrightarrow{\cong} & \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(E, H) \\ f_* \downarrow & & \downarrow f_* \\ \text{Hom}_{\mathbf{Group}}(\mathcal{F}(E), G) & \xrightarrow{\cong} & \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(E, G) \end{array}$$

und

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathbf{Group}}(\mathcal{F}(E), H) & \xrightarrow{\cong} & \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(E, H) \\ \mathcal{F}(g)^* \uparrow & & \uparrow g^* \\ \text{Hom}_{\mathbf{Group}}(\mathcal{F}(F), H) & \xrightarrow{\cong} & \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(F, G) \end{array}$$

kommutieren. Während sehr viele Mengen abstrakt isomorph sind, weil sie etwa abzählbar unendlich sind, ist eine natürliche Bijektion eine deutlich stärkere Bedingung!

Wir beschreiben nun das freie Produkt von Gruppen.

**Definition 2.6.8.** Seien die Gruppen  $G_1 = \langle E_1, R_1 \rangle$  und  $G_2 = \langle E_2, R_2 \rangle$  durch Erzeugendensysteme gegeben. Dann ist das freie Produkt  $G_1 \star G_2$  die Gruppe  $\langle E_1 \amalg E_2, R_1 \cup R_2 \rangle$ . Hier betrachten wir  $R_1 \cup R_2 \subset \mathcal{F}(E_1 \amalg E_2)$ .



Wir bilden also endliche Wörter in Elementen aus  $G_1 \amalg G_2$ ; die einzigen Relationen sind gegeben durch Relationen in  $G_1$ , angewandt auf Elemente in  $G_1$  und Relationen in  $G_2$ , angewandt auf Elemente in  $G_2$ . Das leere Wort ist  $e_{G_1 \star G_2}$ .

Die Gruppenverknüpfung ist das Hintereinanderschalten von Wörtern.

Jedes Element von  $G_1 \star G_2$  hat also eine reduzierte Darstellung der Form  $g_{i_1} g_{i_2} \dots g_{i_n}$ , wobei die Gruppenelemente abwechselnd in  $G_1$  und  $G_2$  liegen.

Es gilt  $G \star \{1\} \cong G \cong \{1\} \star G$  da  $1 = \langle \emptyset, \emptyset \rangle$ .

**Beispiele 2.6.9.** • Zum Beispiel ist  $\mathbb{Z} \star \mathbb{Z} \cong \langle a \rangle \star \langle b \rangle \cong \mathcal{F}(a, b)$  die freie Gruppe auf den beiden Erzeugern  $a, b$ . Sie ist nicht abelsch, da  $ab \neq ba$  gilt.

• Auch die Gruppe  $\mathbb{Z}_2 \star \mathbb{Z}_2$  ist unendlich und nicht-abelsch. Sie heißt **unendliche Diedergruppe**. In ihr gilt zum Beispiel:

$$aba \cdot abab = aba^2bab = ab^2ab = a^2b = b .$$

Wir betten in offensichtlicher Weise die Gruppen  $G_1$  und  $G_2$  in das freie Produkt  $G_1 \star G_2$  als Wörter der Länge 1 ein:

$$\begin{array}{ccc} G_1 & \xrightarrow{j_1} & G_1 \star G_2 \\ g_1 & \mapsto & g_1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} G_2 & \xrightarrow{j_2} & G_1 \star G_2 \\ g_2 & \mapsto & g_2 \end{array}$$

Das leere Wort  $e_{G_1 \star G_2}$  ist das einzige Element in  $G_1 \cap G_2$ .

Wir können nun die Existenz von pushouts von Gruppen sicher stellen:

**Definition 2.6.10.** Gegeben sei ein Diagramm von Gruppen

$$\begin{array}{ccc} G_0 & \xrightarrow{i_1} & G_1 \\ & & \downarrow i_2 \\ & & G_2 \end{array} \tag{3}$$

Sei  $N$  die normale Untergruppe des freien Produkts  $G_1 \star G_2$ , die von den Elementen

$$\{i_1(g_0) (i_2(g_0))^{-1}\}_{g_0 \in G_0}$$

erzeugt wird. Wir definieren  $G_1 \star_{G_0} G_2 := G_1 \star G_2 / N$ .

**Satz 2.6.11.** Der Pushout des Diagramms 3 ist  $G_1 \star_{G_0} G_2$  mit den Abbildungen

$$\tilde{j}_i : G_i \xrightarrow{j_i} G_1 \star G_2 \xrightarrow{q} G_1 \star_{G_0} G_2 .$$

Insbesondere ist das freie Produkt  $G_1 \star G_2$  der Pushout für den Fall  $G_0 = 1$ .

*Beweis.* Im Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} G_0 & \xrightarrow{i_1} & G_1 & & \\ & & \downarrow \tilde{j}_1 & \searrow h_1 & \\ i_2 \downarrow & & G_1 \star G_2 / N & & \\ G_2 & \xrightarrow{\tilde{j}_2} & & \xrightarrow{h} & H \\ & & & \nearrow h_2 & \end{array}$$

setze für  $g_{j_1} \cdot g_{j_2} \cdot \dots \cdot g_{j_n} \in G_1 \star G_2$ , vgl. Definition 2.6.8,

$$\tilde{h}(g_{j_1} \cdot g_{j_2} \cdot \dots \cdot g_{j_n}) := h_{\epsilon_1}(g_{j_1}) \cdot \dots \cdot h_{\epsilon_n}(g_{j_n})$$

mit  $\epsilon_k \in \{1, 2\}$ , je nachdem ob  $g_{j_k} \in G_1$  oder  $g_{j_k} \in G_2$  gilt. Der Gruppenhomomorphismus  $\tilde{h} : G_1 \star G_2 \rightarrow H$  ist so eindeutig festgelegt und induziert einen Gruppenhomomorphismus  $h : G_1 \star_{G_0} G_2 \rightarrow H$  auf dem Quotienten, denn für  $g_0 \in G_0$  gilt

$$\tilde{h}(i_1(g_0)) \stackrel{\text{def}}{=} h_1(i_1(g_0)) = h_2(i_2(g_0)) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{h}(i_2(g_0)) ,$$

also ist  $N \subset \ker \tilde{h}$ . Nach Konstruktion gilt  $h \circ \tilde{j}_2(g_2) = h_2(g_2)$  und  $h \circ \tilde{j}_2(g_2) = h_2(g_2)$  und  $G_1 \star G_2/N$  ist der Kolimes.  $\square$

## 2.7 Anwendungen des Satzes von Seifert-van Kampen

Wir bemerken zuerst die folgenden direkten Folgen des Satzes von Seifert-van Kampen. Sie folgen sogar schon aus

**Korollar 2.7.1.** *Ist ein topologischer Raum  $X$  Vereinigung zweier offener, einfach zusammenhängender Teilräume, deren Durchschnitt wegzusammenhängend ist, so ist  $X$  einfach zusammenhängend.*

*Beweis.* Nach Annahme können wir Satz 2.5.1 anwenden. Da die Teilmengen  $X_1$  und  $X_2$  einfach zusammenhängend sind ist  $\pi_1(X, x_0)$  ein Quotient von  $1 \star 1$  und damit selbst trivial.  $\square$

**Beispiel 2.7.2.** Insbesondere ist die Sphäre  $\mathbb{S}^n$  für  $n \geq 2$  einfach zusammenhängend: wähle als Teilräume die Komplemente von Nordpol und Südpol, die beide homöomorph zu  $\mathbb{R}^n$  und damit beide einfach zusammenhängend sind. Ihr Durchschnitt ist homöomorph zu  $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R} \simeq \mathbb{S}^{n-1}$ , also für  $n \geq 2$  zusammenhängend.

### Beispiele 2.7.3.

1. Sei  $X := \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$  das Bouquet aus zwei Kreisen. Wir überdecken es so mit zwei offenen Mengen  $X_1, X_2$ , dass der Grundpunkt  $x_0$  mit vier Segmenten im Schnitt  $X_1 \cap X_2$  liegt. Dann ist  $\pi_1(X_1, x_0) = \pi_1(X_2, x_0) \cong \mathbb{Z}$  und  $\pi_1(X_1 \cap X_2, x_0) = \{1\}$ . Daher ist  $\pi_1(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1) = \mathbb{Z} \star \mathbb{Z}$  die freie Gruppe auf zwei Erzeugern.
2. Induktiv finden wir  $\pi_1(\bigvee_{i=1}^n \mathbb{S}^1) \cong \underbrace{\mathbb{Z} \star \dots \star \mathbb{Z}}_n =: \mathcal{F}_n$ . Hierbei ist  $\mathcal{F}_n$  die freie Gruppe auf  $n$  Erzeugern.
3. Betrachte den zweidimensionalen Torus ohne einen Punkt,  $X = T^2 \setminus \{p_0\}$ . Der Raum ist ein Deformationsretrakt des Bouquets,  $T^0 \setminus \{p_0\} \simeq \mathbb{S}_{(1)}^1 \vee \mathbb{S}_{(2)}^1$  und nach Bemerkung 2.2.9.3 ist  $\pi_1(T^2 \setminus \{p_0\}) \cong \mathbb{Z} \star \mathbb{Z}$ .

**Beispiel 2.7.4.** Diese Beispiele erlauben es uns, einen topologischen Unterschied zwischen manchen verschlungenen und nicht verschlungenen Schleifen in  $\mathbb{R}^3$  zu machen. Wir betrachten hierzu Komplemente in  $\mathbb{S}^3$ . (Man kann auch Komplemente in  $\mathbb{R}^3$  betrachten.)

Zwei Kreise in verschiedenen Halbräumen haben in  $\mathbb{S}^3$  ein Komplement, das sich auf  $S^1 \vee S^1$  zusammenziehen lässt. Die Hopf-Verschlingung hingegen (bestehend aus zwei benachbarten Kettengliedern), hat ein Komplement in  $\mathbb{S}^3$  das sich auf den Torus zusammenziehen lässt.

Diese Äquivalenzen können Sie in einer Übungsaufgabe genauer ausarbeiten.

Nach Beispiel 2.7.3 ist  $\pi_1(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1, *) = \mathbb{Z} \star \mathbb{Z}$  und nach Beispiel 2.4.2 ist  $\pi_1(T^2, *) \cong \mathbb{Z}^2$ . An der unterschiedlichen Fundamentalgruppe des Komplements können wir diese beiden Verschlingungen unterscheiden.

Wir können nun auch  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{R}^3$  unterscheiden:

**Satz 2.7.5.** *Sei  $n \geq 3$ . Die topologischen Räume  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{R}^n$  mit der euklidischen Topologie sind nicht homöomorph.*

*Beweis.* Angenommen, es gäbe  $f : \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^n$ . Dann ist auch  $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  homöomorph zu  $Y = \mathbb{R}^n \setminus \{f((0, 0))\}$ . Aber  $X$  hat  $\mathbb{S}^1$  als Deformationsretrakt und ist damit nicht einfach zusammenhängend.  $Y$  hingegen ist einfach zusammenhängend nach Beispiel 2.7.2, denn es hat  $\mathbb{S}^{n-1}$  als Deformationsretrakt. Wir verwenden hier zweimal Beispiel 2.1.13.  $\square$

Man beachte, dass  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{R}^3$  natürlich homotopie-äquivalent sind. Dennoch haben wir mit Hilfe der Homotopietheorie gezeigt, dass sie nicht homöomorph sind.

Wir untersuchen nun, wie sich die Fundamentalgruppe durch Ankleben von Zellen wie in Definition 1.16.7 verändert.

**Satz 2.7.6.** *Sei  $X$  ein wegzusammenhängender Raum und  $x_0 \in X$  ein Grundpunkt. Sei  $f : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow X$  stetig mit  $f(1) = x_0$ . Sei  $\iota : X \rightarrow X \cup_f \mathbb{D}^n$  die Inklusion von  $X$ . Dann ist für  $n \geq 3$  der induzierte Gruppenhomomorphismus*

$$\iota_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X \cup_f \mathbb{D}^n, x_0)$$

*ein Isomorphismus.*

Das Ankleben von Zellen  $e^n$  mit  $n \geq 3$  verändert also die Fundamentalgruppe nicht.

*Beweis.* Betrachte

$$F : (\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \rightarrow (X \cup_f \mathbb{D}^n)$$

mit  $F|_{\mathbb{S}^{n-1}} = f$ . Setze

$$Y_1 := X \cup_f \mathbb{D}^n \setminus F(0) \quad Y_2 := \mathring{\mathbb{D}} \subset X \cup_f \mathbb{D}^n .$$

Wähle einen beliebigen Hilfspunkt  $y_0$  in  $Y_1 \cap Y_2$  und einen Weg  $w$  von  $y_0$  nach  $x_0$ . Es liegt die Situation des Satzes 2.5.1 von Seifert-van Kampen vor.

- Es ist  $\pi_1(Y_2, y_0) = \{1\}$ , da  $\mathring{\mathbb{D}}^n \cong \mathbb{R}^n$  zusammenziehbar ist.
- Ferner ist der Durchschnitt

$$Y_1 \cap Y_2 = \mathring{\mathbb{D}}^n \setminus \{F(0)\} \cong \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \simeq \mathbb{S}^{n-1}$$

nach Korollar 2.7.1.2 für  $n \geq 3$  einfach zusammenhängend, also ist  $\pi_1(Y_1 \cap Y_2, y_0) = \{1\}$ .

Nach dem Satz von Seifert-van Kampen 2.5.1 ist

$$\pi_1(X \cup_f \mathbb{D}^n, y_0) \cong \pi_1(Y_1, y_0) .$$

Ferner haben wir die Isomorphie

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Y_1, x_0) \cong \pi_1(Y_1, y_0) ,$$

wobei die letzte Isomorphie durch den Weg  $w$  vermittelt wird und die erste nach Bemerkung 2.2.9.3 folgt, weil  $X$  ein Deformationsretrakt von  $Y_1$  ist.  $\square$

Die Situation ist anders beim Ankleben von 2-Zellen:

**Satz 2.7.7.** *Sei  $X$  ein wegzusammenhängender Raum mit Grundpunkt  $x_0 \in X$  und sei  $f : (\mathbb{S}^1, 1) \rightarrow (X, x_0)$ . Dann induziert die Inklusion  $\iota : X \rightarrow X \cup_f \mathbb{D}^2$  einen surjektiven Gruppenhomomorphismus*

$$\iota_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X \cup_f \mathbb{D}^2, x_0).$$

Wenn wir

$$\begin{aligned} \alpha_f : I &\rightarrow X \\ t &\mapsto f(\exp(2\pi it)) \end{aligned}$$

definieren dann ist  $\ker(\iota_*)$  der von  $[\alpha_f] \in \pi_1(X, x_0)$  erzeugte Normalteiler  $\mathcal{N}(\alpha_f)$ . Es gilt also

$$\pi_1(X \cup_f \mathbb{D}^2, x_0) \cong \pi_1(X, x_0) / \mathcal{N}(\alpha_f).$$

*Beweis.* Mit den gleichen Bezeichnungen wie im Beweis von Satz 2.7.6 ist nun der entscheidende Unterschied, dass der Durchschnitt  $Y_1 \cap Y_2 \simeq \mathbb{S}^1$  nicht einfach zusammenhängend ist, sondern nach Satz 2.3.4 Fundamentalgruppe  $\mathbb{Z}$  hat. Der Homomorphismus  $(\iota_1)_* : \pi_1(Y_1 \cap Y_2, y_0) \rightarrow \pi_1(Y_1, y_0)$  induziert einen Homomorphismus zwischen den Fundamentalgruppen der homotopieäquivalenten Räume,  $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ . Dieser bildet den Erzeugenden  $\exp(2\pi i -) : I \rightarrow \mathbb{S}^1$  auf die Klasse von  $\alpha_f$  in  $\pi_1(X, x_0)$  ab. Daher ist nach dem Satz von Seifert-van Kampen 2.5.1

$$\pi_1(X \cup_f \mathbb{D}^2, x_0) \cong \pi_1(X, x_0) \star_{\pi_1(\mathbb{S}^1, 1)} \pi_1(\mathbb{D}^2) \cong \pi_1(X, x_0) / \mathcal{N}(\alpha_f) . \quad \square$$

Durch das Ankleben der 2-Zelle haben wir das Element  $\alpha_f \in \pi_1(X; x_0)$  "getötet".

**Bemerkung 2.7.8.** Falls  $f$  nicht den Grundpunkt von  $X$  trifft, dann kann man  $\alpha_f$  mit einem Hilfsweg von  $f(1)$  nach  $x_0$  konjugieren.

**Korollar 2.7.9.** *Sei  $G$  eine endlich präsentierte Gruppe,  $G = \langle S, R \rangle$ . Dann gibt es einen wegzusammenhängenden Raum  $X$  mit  $x_0 \in X$ , so dass  $\pi_1(X, x_0) \cong G$  gilt.*

*Beweis.* Sei  $S = \{s_1, \dots, s_m\}$  die endliche Menge der Erzeugenden. Setze  $X_1 := \bigvee_{i=1}^m \mathbb{S}_i^1$  mit Grundpunkt  $x_0 = [1]$ . Wir wissen aus Beispiel 2.7.3, dass  $\pi_1(X_1, x_0)$  die freie Gruppe  $\mathcal{F}(S)$  auf der Menge  $S$  ist. Seien  $R = \{r_1, r_2, \dots, r_n\} \subset \mathcal{F}(S)$  die Relationen. Jede Relation  $r_i$  ist ein Wort in den Erzeugern  $s_1, \dots, s_m$ . Finde nun geschlossene Wege

$$f_i : \mathbb{S}^1 \rightarrow X_1 := \bigvee_{i \in S} \mathbb{S}_i^1$$

mit  $f_i([\alpha]) = r_i$ , wobei  $[\alpha]$  ein Erzeuger von  $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$  ist. Wir konstruieren dann induktiv und finden mit Satz 2.7.7

$$\begin{aligned} X_2 &:= X_1 \cup_{f_1} \mathbb{D}^2 \Rightarrow \pi_1(X_2, x_0) = \mathcal{F}(S)/\mathcal{N}(r_1) \\ X_{i+1} &:= X_i \cup_{f_i} \mathbb{D}^2 \Rightarrow \pi_1(X_{i+1}, x_0) = \mathcal{F}(S)/\mathcal{N}(r_1, \dots, r_i). \end{aligned}$$

Dann ist  $X_{n+1}$  der gesuchte Raum mit Fundamentalgruppe  $\langle S, R \rangle = G$ .  $\square$

Wir können nun leicht die Fundamentalgruppen von Flächen ausrechnen.

**Beispiel 2.7.10.** Zum Beispiel betrachten wir die Kleinsche Flasche. Wir erhalten  $K$  durch Identifizierung der Seiten eines Quadrats als  $\uparrow \xrightarrow{\sim} \downarrow$ . Wir setzen  $X_1$  das Quadrat ohne seinen Mittelpunkt und  $X_2$  das offene Quadrat.  $X_1$  hat Deformationsretrakt  $S^1 \vee S^1$  mit Fundamentalgruppe  $\langle a, b \rangle$ ,  $X_2$  ist zusammenziehbar und  $X_1 \cap X_2$  hat Deformationsretrakt  $S^1$ .

Der Homomorphismus  $i_1 : \pi_1(X_1 \cap X_2, *) \rightarrow \pi_1(X_1, *)$  schickt den Erzeuger von  $\pi_1(X_1 \cap X_2, *)$  nach  $abab^{-1}$ . Alternativ können wir Satz 2.7.7 verwenden.

Also gilt  $\pi_1(K, *) \cong \langle a, b \mid abab^{-1} \rangle$ .

**Beispiel 2.7.11.** Für die Fundamentalgruppe einer Fläche  $F_g$  vom Geschlecht  $g$  (intuitiv gesprochen: den Torus mit  $g$  Löchern) kann man induktiv zeigen

$$\pi_1(F_g, x_0) = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid \prod_{i=1}^g a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1} \rangle.$$

Vgl. das Übungsblatt.

## 2.8 Fundamentalgruppe des projektiven Raumes

Aus Beispiel 1.12.5.5 kennen wir schon verschiedene Darstellungen des reellen projektiven Raums  $\mathbb{R}P^n = \mathbb{S}^n / \{\pm 1\}$ .

**Satz 2.8.1.**  $\mathbb{R}P^n$  hat eine Zellzerlegung  $\mathbb{R}P^n = \cup_{i=0}^n e^i$ . Es gilt  $\mathbb{R}P^n = \mathbb{R}P^{n-1} \cup_p \mathbb{D}^n$  wobei  $p : \partial \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{R}P^{n-1}$  die kanonische Abbildung  $\mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}P^{n-1}$  ist.

*Beweis.* Wir betrachten mit Beispiel 1.12.5.5  $\mathbb{R}P^n \cong \mathbb{D}^n / \sim$  mit der üblichen Äquivalenzrelation  $z \sim -z$  auf  $\partial \mathbb{D}^n$ .

Es gilt aber nach Beispiel 1.12.5.5 auch  $\partial \mathbb{D}^n / \sim \cong \mathbb{R}P^{n-1}$  und die Abbildung  $p : \partial \mathbb{D}^n \rightarrow \partial \mathbb{D}^n / \sim$  ist genau die kanonische Abbildung  $\mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}P^{n-1}$ .

Damit entsteht  $\mathbb{R}P^n$  durch Zusammenkleben von  $\mathbb{D}^n$  und  $\mathbb{R}P^{n-1}$  mittels  $p$ , vergleiche Definition 1.16.5.  $\square$

**Satz 2.8.2.** Für jedes  $n \geq 2$  gilt  $\pi_1(\mathbb{R}P^n) \cong \mathbb{Z}_2$ .

*Beweis.* Für  $n = 2$  folgt gilt  $\mathbb{R}P^2 = \mathbb{R}P^1 \cup_{p: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}P^1} \mathbb{D}^2$ . Der Homöomorphismus  $\mathbb{R}P^1 \cong \mathbb{S}^1$  identifiziert  $p$  mit der Abbildung  $z \mapsto z^2$ . Also gilt  $\pi_1(\mathbb{R}P^2, *) \cong \mathbb{Z}_2$  nach Satz 2.7.7.

Für  $n \geq 3$  haben wir die Zerlegung aus Satz 2.8.1

$$\mathbb{R}P^n = \mathbb{R}P^2 \cup e^3 \cup \dots \cup e^n.$$

Aus Satz 2.7.6 folgt  $\pi_1(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}_2$ .  $\square$

Den Fall  $n = 3$  kann man auf überraschend konkrete Weise veranschaulichen.

Hierzu konstruieren wir zuerst einen Homöomorphismus  $SO(3) \cong \mathbb{R}P^3$ . Jedes Element von  $SO(3)$  ist als Rotation durch eine orientierte Achse und einen Winkel bestimmt, wobei die Rotation um die Achse  $x$  mit Winkel  $\theta$  gleich der Rotation um die Achse  $-x$  mit Winkel  $-\theta$  ist. Also kodieren wir die Rotation um die Achse  $x$  mit Winkel  $\theta$  durch einen Vektor  $x$  in  $\mathbb{R}^3$  mit Länge  $\|x\| = \theta \in [0, \pi]$  und wir identifizieren  $x$  und  $-x$ , wenn  $\|x\| = \pi$ . Wir können wenn wir nun mit Faktor  $\frac{1}{\pi}$  skalieren identifizieren wir alle Punkte von  $SO(3)$  mit  $\mathbb{D}^3/\sim$ , wobei  $\sim$  Antipoden auf dem Rand von  $\mathbb{D}^3$  identifiziert.

Man prüft leicht, dass dies ein Homöomorphismus ist (wenn wir Achse und Winkel verändern, dann verändern sich die Matrixkoordinaten der Rotation stetig). Nach Beispiel 1.12.5.5 ist also  $SO(3) \cong \mathbb{R}P^3$ .

Wir versuchen also, die Fundamentalgruppe unserer Euklidischen Symmetriegruppe zu verstehen. Das lässt sich anschaulich verstehen. Nehmen Sie eine (gefüllte) Teetase in ihre rechte Hand, am besten fassen Sie die Tasse am unteren Rand an. Drehen Sie die Tasse gegen den Uhrzeigersinn. Bewegen Sie Ihren Arm auf und ab, wenn nötig (aber passen Sie auf, dass kein Tee ausläuft). Drehen Sie die Tasse um 360 Grad im Uhrzeigersinn. Ihr Arm ist leicht verknotet. Der Pfad der Tasse repräsentiert einen Erzeugenden von  $\pi_1(SO(3))$ . Drehen Sie noch einmal um 360 Grad im Uhrzeigersinn. Ihr Arm ist entknotet. Der Erzeuger hat Ordnung zwei.

## 2.9 Gruppenwirkungen auf topologischen Räumen

**Definition 2.9.1.** Sei  $G$  eine Gruppe und  $X$  ein topologischer Raum. Wir können  $G$  als diskreten topologischen Raum betrachten und sagen,  $G$  operiert auf  $X$ , wenn es eine stetige Abbildung

$$\rho: G \times X \rightarrow X$$

gibt mit  $\rho(1, x) = x$  für alle  $x \in X$  und  $\rho(g_2, \rho(g_1, x)) = \rho(g_2 \cdot g_1, x)$  für alle  $g_1, g_2 \in G$ . Wir nennen  $\rho$  eine **Gruppenoperation** oder **Gruppenwirkung**.

Dann heißt  $X$  heißt  **$G$ -Raum**.

Wir schreiben auch  $\rho(g, x) = g.x = gx$ . Eine Gruppenwirkung definiert einen Gruppenhomomorphismus  $G \rightarrow \text{Homöo}(X)$  von  $G$  in die Gruppe der Homöomorphismen von  $X$ .

### Beispiele 2.9.2.

1.  $\mathbb{Z}$  operiert durch Translation auf  $\mathbb{R}$ .
2. Die Gruppe  $GL_n(\mathbb{R})$  operiert auf  $\mathbb{R}^n$  durch Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor.
3. Die Gruppe  $S_4$  operiert durch Rotationen auf dem Kubus  $I^3$ .

**Definition 2.9.3.** Sei  $X$  ein topologischer Raum mit einer Operation einer Gruppe  $G$ . Wir definieren genau wie für Gruppenoperationen auf Mengen die folgenden Konzepte.

1. Eine Teilmenge  $A \subset X$  heißt **invariant**, falls  $g.a \in A$  für alle  $g \in G$  und alle  $a \in A$  gilt.
2. Sei  $x_0 \in X$  Dann heißt

$$Gx_0 := \{g.x_0 \mid g \in G\}$$

die **Bahn** von  $x_0$ . Die Bahn  $Gx_0$  ist invariant unter  $G$ .

Die Gruppe

$$G_{x_0} := \text{Stab}_G(x_0) := \{g \in G \mid gx_0 = x_0\} \leq G$$

heißt **Stabilisatoruntergruppe** oder **Isotropiegruppe** von  $x_0$ . (Es gilt  $\text{Stab}_G(gx_0) = g\text{Stab}_G(x_0)g^{-1}$ .)

3. Ein Punkt  $x_0 \in X$  heißt **Fixpunkt** der Gruppenwirkung, wenn  $g.x_0 = x_0$  für alle  $g \in G$  gilt. Äquivalent:  $\text{Stab}_G(x_0) = G$ .
4. Eine Gruppenwirkung heißt **frei**, falls  $gx \neq x$  für alle  $g \in G$  mit  $g \neq 1$  und alle  $x \in X$  gilt (also wenn alle Stabilisatoren trivial sind).
5. Eine Gruppenwirkung heißt **transitiv**, falls  $Gx_0 = X$  alle  $x_0 \in X$  gilt (also wenn es nur eine Bahn gibt).

Eine Gruppenwirkung  $\rho : G \times X \rightarrow X$  induziert eine Äquivalenzrelation auf  $X$ : es ist  $x \sim_G y$  genau dann, wenn es ein  $g \in G$  gibt mit  $gx = y$ , also genau dann, wenn  $y \in Gx$  gilt. Die Äquivalenzklasse von  $x_0 \in X$  ist dann die Bahn von  $x_0$ , also  $[x_0] = Gx_0$ . Die Menge der Äquivalenzklassen, den sogenannten **Bahnenraum**, bezeichnen wir mit  $X/G := X/\sim_G$ .

Wir versehen den Bahnenraum mit der Quotiententopologie, so dass die Projektion  $\pi : X \rightarrow X/G$  stetig ist.

**Beispiel 2.9.4.**  $\mathbb{Z}$  operiert auf  $\mathbb{R}$  durch Translation und der Bahnenraum ist  $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$ . Das erklärt auch unsere Notation aus Beispiel 1.12.3.

**Definition 2.9.5.** Seien  $X, Y$   $G$ -Räume. Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  heißt  **$G$ -äquivariant**, falls  $f(gx) = gf(x)$  für alle  $g \in G$  und alle  $x \in X$  gilt.

Eine  $G$ -äquivariante stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  induziert eine Abbildung

$$\begin{aligned} \bar{f} : X/G &\rightarrow Y/G \\ [x] &\mapsto [f(x)] \end{aligned}$$

Wir haben nämlich eine eindeutige Abbildung

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \pi^X \downarrow & & \downarrow \pi^Y \\ X/G & \xrightarrow{\bar{f}} & Y/G \end{array}$$

die stetig ist, weil  $\bar{f} \circ \pi^X = \pi^Y \circ f$  stetig ist. Ist  $f$  ein Homöomorphismus, so ist auch  $\bar{f}$  ein Homöomorphismus.

**Beispiel 2.9.6.** Betrachten wir die Einbettung  $\iota : S^1 \subset S^2$  des Äquators. Wenn wir  $S^n$  mit der  $\mathbb{Z}_2$ -Wirkung  $x \mapsto -x$  ausstatten, dann ist  $\iota$   $\mathbb{Z}_2$ -äquivariant und induziert  $\mathbb{R}P^1 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ .

Der folgende Satz zeigt, dass Gruppenwirkungen sehr besondere Identifizierungen ergeben. Die Projektion auf einen Quotientraum ist immer stetig. Es gilt aber auch:

**Satz 2.9.7.** Sei  $X$  ein  $G$ -Raum. Die Projektion  $\pi : X \rightarrow X/G$  ist stets offen.

*Beweis.* Sei  $B \subset X$  offen. Es ist  $\pi(B)$  genau dann offen in der Quotiententopologie auf  $X/G$ , wenn das Urbild  $\pi^{-1}\pi(B) \subset X$  offen in  $X$  ist. Aber

$$\pi^{-1}\pi(B) = \cup_{g \in G} gB$$

und mit  $B$  ist auch  $gB$  für alle  $g \in G$  offen, weil man leicht sieht, dass die Linkstranslation  $L_g : x \mapsto gx$  ein Homöomorphismus ist.  $\square$

Wir werden uns vor allem für Operationen interessieren, die die folgende Bedingung erfüllen.

**Definition 2.9.8.** Sei  $G$  diskret und  $X$  ein  $G$ -Raum. Dann nennen wir die Operation **Überlagerungswirkung**, falls es für alle  $x \in X$  eine Umgebung  $U \in \mathcal{U}(x)$  gibt, so dass aus  $U \cap gU \neq \emptyset$  folgt  $g = e$ .

Überlagerungswirkungen sind insbesondere frei.

Man sieht leicht, dass die Operation von  $\mathbb{Z}$  auf  $\mathbb{R}$  eine Überlagerungswirkung ist.

**Bemerkung 2.9.9.** Für diese Art von Operation findet sich in der Literatur oft der Begriff *eigentlich diskontinuierlich* oder *frei und eigentlich diskontinuierlich*. Der Begriff findet sich allerdings auch für einige andere Arten von Wirkungen und ist ein Beispiel für nicht besonders glückliche Nomenklatur.

Deswegen folgen wir hier Hatcher, der für solche Operationen, den Begriff *covering space action* einführt. Damit der Begriff mehr Sinn ergibt, werden wir uns nun mit Überlagerungen befassen.

## 2.10 Faserbündel und Überlagerungen

Wir erinnern uns, dass wir  $\pi_1(S^1, 1)$  mithilfe der stetigen Abbildung  $\mathbb{R} \rightarrow S^1$  berechnet haben. Für den Rest des Kurses werden wir diese Herangehensweise auf eine große Anzahl von Räumen ausdehnen.

Zuerst wollen wir verstehen, was  $\mathbb{R}^1 \rightarrow S^1$  besonders macht.

**Definition 2.10.1.**

1. Sei  $p : E \rightarrow B$  eine stetige Abbildung und  $U \subset B$  offen. Eine lokale **Trivialisierung** mit typischer Faser  $F$  über  $U$  ist ein Homöomorphismus

$$h : p^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U \times F$$

mit  $pr_1 \circ h(z) = p(z)$  für alle  $z \in p^{-1}(U)$ , als Diagramm

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow[\sim]{h} & U \times F \\ & \searrow p|_{p^{-1}(U)} & \swarrow pr_1 \\ & U & \end{array}$$



- Die Abbildung  $E \xrightarrow{p} B$  heißt **lokal trivial** mit typischer Faser  $F$ , falls jeder Punkt  $b \in B$  eine offene Umgebung  $U$  hat, so dass es eine lokale Trivialisierung über  $U$  mit typischer Faser  $F$  gibt. Eine solche Abbildung heißt auch **Faserbündel** über  $B$ . Wir nennen  $E$  den **Totalraum**,  $F$  die **Faser** und  $B$  die **Basis**

Eine lokal triviale Abbildung ist stets surjektiv. Denn jeder Punkt  $b \in B$  hat eine Umgebung  $U$ , so dass  $p|_{p^{-1}(U)}$  ist eine Surjektion sogar auf die ganze Umgebung  $U$  ist.

Es gibt allerdings eine Ausnahme: Nach der Definition ist die leere Abbildung  $\emptyset \rightarrow B$  ein Faserbündel! Wir wollen dieses Beispiel aber der Einfachheit halber in der Folge ausschließen.

**Definition 2.10.2.** Eine lokal triviale Abbildung mit *diskreter* typischer Faser  $F$  heißt **Überlagerung** und wir schreiben oft  $p : \tilde{X} \rightarrow X$ .

Eine **Überlagerung mit Grundpunkt** ist eine Abbildung  $p : (\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow (X, x)$  von topologischen Räumen mit Grundpunkt, so dass  $\tilde{X} \rightarrow X$  eine Überlagerung ist.

### Beispiele 2.10.3.

- Die Abbildung

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{S}^1 \\ t &\mapsto \exp(2\pi it) \end{aligned}$$

die wir in Abschnitt 2.3 betrachtet haben, ist eine Überlagerung mit typischer Faser  $\mathbb{Z}$ , denn  $f^{-1}(U^\pm) \cong U^\pm \times \mathbb{Z}$ .

- Für  $n \in \mathbb{N}$  ist die Abbildung

$$\begin{aligned} f : \mathbb{S}^1 &\rightarrow \mathbb{S}^1 \\ z &\mapsto z^n \end{aligned}$$

eine Überlagerung, deren typische Faser  $n$  Elemente hat.

- Das Möbiussche Band ist ein Faserbündel über  $\mathbb{S}^1$  mit typischer Faser  $I = [0, 1]$ , aber keine Überlagerung.

### Definition 2.10.4.

- Zwei Faserbündel  $X_1 \xrightarrow{p_1} X$  und  $X_2 \xrightarrow{p_2} X$  heißen **äquivalent**, falls es einen Homöomorphismus  $f$  von  $X_1$  nach  $X_2$  gibt mit  $p_2 \circ f = p_1$ , als Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{f} & X_2 \\ & \searrow p_1 & \swarrow p_2 \\ & & X \end{array}$$

Dann bildet  $f$  für jedes  $x \in X$  die Faser  $p_1^{-1}(x)$  bijektiv auf die Faser  $p_2^{-1}(x)$  ab.

- Ein Faserbündel  $E \rightarrow B$  mit Faser  $F$  heißt **trivial**, falls es äquivalent zum trivialen Faserbündel  $B \times F \xrightarrow{pr_1} B$  ist.

### Beispiele 2.10.5.

1. Die Projektion  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (und allgemein jede Projektion  $Y \times X \rightarrow X$ ) ist ein triviales Faserbündel.
2. Das durch das Möbiussche Band gegebene Faserbündel ist nicht trivial. Denn eine Trivialisierung würde einen Homöomorphismus auf dem Rand induzieren. Aber der Rand des trivialen Bündels ist  $\mathbb{S}^1 \amalg \mathbb{S}^1$  und der Rand des Möbiusbandes ist  $\mathbb{S}^1$ .

Im Falle einer Überlagerung  $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ , also einer lokal-trivialen Abbildung mit diskreter typischer Faser  $F$ , ist für eine lokale Trivialisierung auf  $U \subset X$

$$p^{-1}(U) \cong U \times F \cong \amalg_{y \in F} U \times \{y\} .$$

Die Summanden von  $p^{-1}(U)$  heißen **Blätter**. Die Einschränkung von  $p$  auf ein Blatt ist ein Homöomorphismus. Man sagt auch,  $p$  ist ein **lokaler Homöomorphismus**, denn jede Umgebung von  $\tilde{x} \in \tilde{X}$  hat eine Umgebung, die homöomorph zu einer Umgebung von  $p(\tilde{x}) \in X$  ist.

Beispiele für Überlagerungen erhalten wir durch Gruppenoperationen.

**Satz 2.10.6.** *Sei  $G$  eine diskrete Gruppe und  $\tilde{X}$  ein  $G$ -Raum. Handelt es sich um eine Überlagerungswirkung, vgl. Definition 2.9.8, so ist die kanonische Projektion  $p : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}/G$  auf den Bahnenraum eine Überlagerung mit typischer Faser  $G$ .*

**Definition 2.10.7.** Wir nennen eine solche Überlagerung eine  $G$ -Überlagerung.

Zum Beispiel operiert die Gruppe  $\mathbb{Z}/2$  als Überlagerungswirkung auf  $\mathbb{S}^n$ , wobei der Erzeuger durch die Antipodenabbildung operiert. Daher ist

$$\mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n/\mathbb{Z}_2 = \mathbb{R}P^n$$

eine zweiblättrige Überlagerung.

*Beweis.* Sei  $\tilde{x} \in \tilde{X}$ . Nach Definition 2.9.8 können wir eine offene Umgebung  $\tilde{U}$  von  $\tilde{x}$  so wählen, dass  $\tilde{U} \cap g\tilde{U} \neq \emptyset$  impliziert, dass  $g = 1$  ist. Es ist dann  $U := p\tilde{U} \in \mathcal{U}([\tilde{x}])$  eine offene Umgebung von  $[\tilde{x}] := p\tilde{x} \in \tilde{X}/G$  und  $p|_{\tilde{U}}$  ist eine offene, stetige Bijektion, also ein Homöomorphismus. Wir finden Homöomorphismen

$$p^{-1}(p\tilde{U}) = \cup_{g \in G} g\tilde{U} \cong \amalg_{g \in G} g\tilde{U} \cong U \times G .$$

Hierbei haben wir erst ausgenutzt, dass  $g\tilde{U} \cap g'\tilde{U} = \emptyset$  für  $g \neq g'$  gilt, so dass die Vereinigung disjunkt ist. Da  $L_g : x \mapsto g.x$  ein Homöomorphismus ist, gilt  $g\tilde{U} \cong \tilde{U}$ . Im letzten Schritt wurde des weiteren benutzt, dass die Gruppe  $G$  mit der diskreten Topologie versehen ist.  $\square$

## 2.11 Hochhebungen und Faserungen

In unserem motivierenden Beispiel  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$  haben wir gesehen, dass die wirkende Gruppe genau gleich der Fundamentalgruppe des Quotienten ist. Wir untersuchen also als nächstes, wie sich Fundamentalgruppen unter Überlagerungen verhalten. Es ist erstaunlich, wie fruchtbar die Verbindung von Fundamentalgruppen und Überlagerungen ist.

Wir können, so wie wir es mit  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$  getan haben, die Überlagerungen von  $X$  als (teilweise) Abwicklung von Wegen in  $X$  betrachten.

**Definition 2.11.1.** Sei  $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$  eine Überlagerung und  $f : Y \rightarrow X$  eine Abbildung. Dann heißt eine Abbildung  $\tilde{f} : Y \rightarrow \tilde{X}$  eine **Hochhebung** von  $f$ , wenn  $p \circ \tilde{f} = f$  gilt. Als Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} & & \tilde{X} \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Wir haben schon in Kapitel 2.3 für die Überlagerung  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$  aus Beispiel 2.10.3.1 Hochhebungen von Wegen  $w : I \rightarrow \mathbb{S}^1$  zu Wegen  $\tilde{w} : I \rightarrow \mathbb{R}$  betrachtet. Wir beweisen nun ein allgemeines Eindeutigkeitsresultat für Hochhebungen:

**Lemma 2.11.2** (Eindeutigkeit von Hochhebungen). *Sei  $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$  eine Überlagerung und  $Y$  ein zusammenhängender Raum. Stimmen zwei Hochhebungen  $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 : Y \rightarrow \tilde{X}$  von  $f : Y \rightarrow X$  in einem Punkt überein, so sind sie gleich,  $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$ .*

*Beweis.* Sei  $y \in Y$  beliebig und  $U \in \mathcal{U}(p\tilde{f}_1(y))$  eine trivialisierende Umgebung von  $p\tilde{f}_1(y) = p\tilde{f}_2(y) = f(y) \in X$ . Dann ist

$$p^{-1}U \cong U \times F \cong \coprod_{z \in F} U \times \{z\} .$$

Sei  $U_1 \subset p^{-1}U$  das Blatt, das  $\tilde{f}_1(y)$  enthält und  $U_2 \subset p^{-1}U$  das Blatt, das  $\tilde{f}_2(y)$  enthält. Ferner betrachte die folgende Umgebung von  $y$  in  $Y$ :

$$V := \tilde{f}_1^{-1}(U_1) \cap \tilde{f}_2^{-1}(U_2) \in \mathcal{U}(y) .$$

Fall 1: Es gilt  $\tilde{f}_1(y) = \tilde{f}_2(y)$ . Dann ist  $U_1 = U_2$  und, weil die Faser diskret ist,  $\tilde{f}_1(z) = \tilde{f}_2(z)$  für alle  $z \in V$ . Daher ist die Teilmenge

$$W := \{z \in Y \mid \tilde{f}_1(z) = \tilde{f}_2(z)\} \subset Y \quad \text{offen.}$$

Fall 2: Es gilt  $\tilde{f}_1(y) \neq \tilde{f}_2(y)$ . Dann ist  $U_1 \neq U_2$  und  $\tilde{f}_1(z) \neq \tilde{f}_2(z)$  für alle  $z \in V$ . Daher ist auch die Teilmenge

$$W' := \{z \in Y \mid \tilde{f}_1(z) \neq \tilde{f}_2(z)\} \subset Y \quad \text{offen.}$$

Damit ist  $Y$  als disjunkte Vereinigung der beiden offenen Mengen  $W$  und  $W'$  geschrieben. Nach Voraussetzung ist  $W \neq \emptyset$ ; da  $Y$  zusammenhängend ist, muss  $W' = \emptyset$  gelten.  $\square$

Wir wollen nun Wege in  $X$  zu Wegen in  $\tilde{X}$  mit vorgegebenen Anfangspunkt  $\tilde{x} \in \tilde{X}$  heben.

**Satz 2.11.3** (Eindeutige Hochhebbarkeit von Wegen). *Sei  $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$  eine Überlagerung. Zu jedem Weg  $w : I \rightarrow X$  und jedem Punkt  $\tilde{x} \in \tilde{X}$  mit  $p\tilde{x} = w(0)$  gibt es genau eine Hochhebung  $\tilde{w}$  von  $w$  mit Anfangspunkt  $\tilde{w}(0) = \tilde{x}$ .*

Dieser Satz ist ein Spezialfall vom nächsten Satz, daher geben wir keinen gesonderten Beweis..

Wir schreiben auch  $\tilde{w}_{\tilde{x}}$  für die Hochebung von  $w$  mit Anfangspunkt  $\tilde{x}$ .

Wir bemerken, dass die Hochhebung einer geschlossenen Kurve nicht unbedingt geschlossen ist. Dies hatten wir schon bei der Überlagerung  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$  in Kapitel 2.3 gesehen.

Da wir auch Homotopien, also durch  $I$  parametrisierte Familien von Abbildungen, heben wollen, führen wir die folgende Definition ein.

**Definition 2.11.4.**

1. Eine Abbildung  $p : E \rightarrow B$  hat die **Homotopiehochhebungseigenschaft** für einen Raum  $Y$ , falls es zu jeder Abbildung

$$h : Y \times I \rightarrow B$$

und jeder Abbildung  $g : Y \rightarrow E$  mit  $p \circ g = h_0$  eine Abbildung  $H : Y \times I \rightarrow E$  mit  $p \circ H = h$  gibt, so dass  $H(y, 0) = g(y)$  für alle  $y \in Y$  gilt. Als Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{g} & E \\ \downarrow \iota_0 & \nearrow H & \downarrow p \\ Y \times I & \xrightarrow{h} & B \end{array}$$

2. Eine Abbildung  $p : E \rightarrow B$  heißt **Faserung**, falls sie die Homotopiehochhebungseigenschaft für alle Räume  $Y$  hat.

**Satz 2.11.5.** *Eine Überlagerung  $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$  ist eine Faserung.*

*Beweis.* Zu Abkürzung nennen wir eine offene Teilmenge  $U \subset X$  *zulässig*, wenn es über  $U$  eine lokale Trivialisierung von  $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$  gibt.

Wir legen einen Punkt  $y \in Y$  fest. Für jedes  $(y, t) \in Y \times I$  hat der Bildpunkt  $h(y, t) \in X$  eine zulässige Umgebung  $U(y, t)$  in  $X$ . Da  $h$  stetig ist finden wir Umgebungen  $N_t$  von  $y$  und Intervalle  $I_t \subset I$  mit  $(y, t) \in N_t \times I_t \subset h^{-1}(U(y, t))$ . Da  $I$  kompakt ist, können wir es mit endlich vielen Intervallen  $I_t$  überdecken. Wir wählen also  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1$  mit  $N_i \times [t_i, t_{i+1}] \subset h^{-1}(U_i)$  für endlich viele zulässige Mengen  $\{U_i\}$ .

Wir definieren die Umgebung  $N_y$  von  $y$  in  $Y$

$$N_y := \bigcap_{i=0}^{m-1} N_i$$

und werden nun  $H$  auf  $N_y \times I$  definieren. Wir induzieren über  $i$ . Wir nehmen zuerst an, dass wir  $H$  auf  $N_y \times [0, t_i]$  konstruiert haben. Wir bezeichnen mit  $\tilde{U}_i$  das Blatt über  $U_i$ , das  $H(y, t_i)$  enthält. Wir können annehmen, dass  $\tilde{U}_i$  ganz  $H(N_y \times \{t_i\})$  enthält. Falls dies nicht der Fall ist, schneiden wir  $N_y$ , mit der offenen Menge  $(H|_{N_y \times \{t_i\}})^{-1}(\tilde{U}_i)$ .

Wir definieren  $H|_{N_y \times [t_i, t_{i+1}]} = p^{-1} \circ h$ , da  $p : \tilde{U}_i \rightarrow U_i$  ein Homöomorphismus ist.  $H|_{N_y \times [0, t_{i+1}]}$  ist stetig, da die Konstruktionen auf  $H_{N_y \times \{t_i\}}$  übereinstimmen.

Nach endlich vielen Schritten haben wir  $H_{N_y \times I}$  konstruiert. (Und da wir  $N_y$  nur endlich oft mit offenen Mengen geschnitten haben ist es immer noch eine offene Menge.)

Da  $Y$  von den  $N_y$  überdeckt wird, haben wir  $H$  gefunden.  $H$  ist stetig, da seine Einschränkung auf jedes  $N_y \times I$  stetig ist.

Wir müssen allerdings noch prüfen, dass  $H$  wohldefiniert ist. Sei also  $z \in N_y \cap N_{y'}$  und bezeichne mit  $H$  und  $H'$  die beiden Hochhebungen, die wir von  $y$  bzw.  $y'$  ausgehend definieren.

Die beiden Hochhebungen stimmen nach Annahme auf  $(z, 0)$  überein. Dann wenden wir Lemma 2.11.2 auf das Intervall  $\{z\} \times I$  an. Die Eindeutigkeit der Hochhebung zeigt, dass  $H(z, t) = H'(z, t)$  für alle  $t \in I$ .  $\square$

*Beweis von Satz 2.11.3.* Wir setzen einfach  $Y = *$ ,  $h = w$  und  $g : * \mapsto \tilde{x}$  in Satz 2.10.4. (Wir identifizieren  $* \times I$  und  $I$ .) Dann ist  $H : I \rightarrow \tilde{X}$  die gesuchte Hohebung  $\tilde{w}$ .  $\square$

## 2.12 Überlagerungen und Fundamentalgruppen

Die Hohebungseigenschaft hat zahlreiche wichtige Konsequenzen.

**Korollar 2.12.1.** *Sei  $(\tilde{X}, \tilde{x}) \xrightarrow{p} (X, x)$  eine Überlagerung mit Grundpunkt. Der Gruppenhomomorphismus*

$$p_* : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow \pi_1(X, x)$$

*ist injektiv.*

*Beweis.* Wir werden die folgende Behauptung beweisen: Seien  $\tilde{w}_0, \tilde{w}_1 : I \rightarrow \tilde{X}$  Wege mit gleichem Anfangspunkt,  $\tilde{w}_0(0) = \tilde{w}_1(0) =: \tilde{x}$ . Dann gilt  $\tilde{w}_0 \simeq \tilde{w}_1$  relativ  $\tilde{x}$  in  $\tilde{X}$  genau dann, wenn  $p\tilde{w}_0 \simeq p\tilde{w}_1$  relativ  $x$  in  $X$  gilt.

Die Aussage des Korollars folgt sofort aus der Behauptung.

Wenn es eine Homotopie  $H : \tilde{w}_0 \simeq \tilde{w}_1$  in  $\tilde{X}$  relativ zu  $\tilde{x}$  gibt, dann ist natürlich  $pH$  eine Homotopie von  $p\tilde{w}_0$  nach  $p\tilde{w}_1$ .

Es gelte  $p\tilde{w}_0 \simeq p\tilde{w}_1$  relative zu  $p\tilde{x}$ . Es gibt also eine Homotopie in  $X$

$$h : I \times I \rightarrow X$$

mit  $h(s, 0) = p\tilde{w}_0(s)$ ,  $h(s, 1) = p\tilde{w}_1(s)$  für alle  $s \in I$  und Anfangspunkt  $h(0, t) = p\tilde{x}$  für alle  $t \in I$ . Finde nun wegen Satz 2.11.5 eine Hochhebung  $H$  in

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\tilde{w}_0} & \tilde{X} \\ \iota_0 \downarrow & \nearrow H & \downarrow p \\ I \times I & \xrightarrow{h} & X \end{array}$$

wobei  $\iota_0(s) = (s, 0)$ .

Es gilt dann  $H_0 = \tilde{w}_0$  und  $p \circ H = h$ . Da für alle  $t \in I$  der Punkt  $H(0, t)$  in der Faser über  $x$  liegt und diese Faser bei einer Überlagerung diskret ist, gilt  $H(0, t) = \tilde{w}_0(0) = \tilde{w}_1(0)$  für alle  $t \in I$ .

Zu zeigen ist  $H_1 = \tilde{w}_1$ . Aber die beiden Wege

$$s \mapsto H(s, 1) \quad \text{und} \quad s \mapsto \tilde{w}_1(s)$$

in  $\tilde{X}$  sind Hochhebungen des Wegs  $s \mapsto p\tilde{w}_1(s)$  in  $X$ , da  $pH(s, 1) = p\tilde{w}_1(s) = h(s, 1)$ . Die Hochhebungen stimmen im Anfangspunkt überein, also sind sie nach Lemma 2.11.2 gleich und  $H$  ist eine Homotopie von  $\tilde{w}_0$  nach  $\tilde{w}_1 = H_1$  in  $\tilde{X}$ .  $\square$

### Beispiele 2.12.2.

1. Die Überlagerung  $z \mapsto z^3$  von  $S^1$  nach  $S^1$  induziert den Homomorphismus  $k \mapsto 3 \cdot k$  von  $\mathbb{Z}$  nach  $\mathbb{Z}$ .
2. Es gibt eine unendlich-blättrige Überlagerung  $\tilde{X} \rightarrow S^1 \vee S^1$  mit  $\tilde{X} = \mathbb{R} \amalg_{\mathbb{Z}} (\mathbb{I}_{\mathbb{Z}} S^1)$ , wir kleben also an jede ganze Zahl in  $\mathbb{R}$  einen Kreis an. Der Totalraum  $\tilde{X}$  ist homotopieäquivalent zur Einpunktvereinigung von unendlich vielen Kreisen. Es gilt  $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) = \mathbb{Z}^{*\infty}$ . Nach Korollar 2.12.1 ist also die freie Gruppe auf abzählbar unendlich vielen Erzeugenden eine Untergruppe der freien Gruppe auf zwei Erzeugenden!

Die Hochhebung erlaubt uns auch, eine natürliche Abbildung von der Fundamentalgruppe der Basis in die Faser zu definieren:

**Korollar 2.12.3.** *Sei  $p : (\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow (X, x)$  eine Überlagerung mit Grundpunkt. Sei  $F$  die typische Faser  $F$  mit Homöomorphismus  $\iota : F \rightarrow p^{-1}(x)$ . Dann ist*

$$\ell : [w] \mapsto \iota^{-1}(\tilde{w}_{\tilde{x}}(1))$$

eine wohldefinierte Abbildung  $\pi_1(X, x) \rightarrow F$ .

Wir erinnern uns, dass für jeden Weg  $w$  in  $X$  der Weg  $\tilde{w}_{\tilde{x}}$  eine Hochhebung von  $w$  mit Anfangspunkt  $\tilde{x}$  ist. Wir lassen das Subskript weg, wenn keine Verwechslungsgefahr besteht.

*Beweis.* Nach Satz 2.11.3 ist  $\tilde{w}_{\tilde{x}}$  eindeutig definiert, und nach Satz 2.11.5 können wir auch Homotopien hebeben. Sei also  $H$  eine Homotopie  $w' \simeq w$ , dann ist  $\tilde{H}$  eine Homotopie  $\tilde{w}' \simeq \tilde{w}$ . Da  $\tilde{H}(t, 1)$  für alle  $t$  in  $p^{-1}(x)$  liegt, definiert  $t \mapsto \iota^{-1}(\tilde{H}(t, 1))$  einen Weg von  $\ell(w)$  nach  $\ell(w')$  in  $F$  und da  $F$  diskret ist gilt  $\ell(w) = \ell(w')$ .  $\square$

Wir erinnern uns, dass  $\pi_0(X)$  die Menge der Wegkomponenten eines topologischen Raums  $X$  bezeichnet. Jede stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  von Räumen induziert eine Abbildung  $\pi_0(f) : \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$  von Wegkomponenten. Im allgemeinen ist  $\pi_0(X)$  keine Gruppe. Wenn  $(X, x_0)$  ein Raum mit Grundpunkt ist, dann hat immerhin auch die Menge  $\pi_0(X)$  einen Grundpunkt, nämlich die Wegkomponente von  $x_0$ .

In der Notation von Korollar 2.12.3 hat  $F$  einen Grundpunkt  $f := \iota^{-1}(\tilde{x})$ . Da  $F$  diskret ist, gilt  $F = \pi_0(F)$ .

**Satz 2.12.4.** *Mit Notation wie oben gibt es eine Sequenz von Abbildungen:*

$$1 \rightarrow \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \xrightarrow{\pi_1(p)=p_*} \pi_1(X, x) \xrightarrow{\ell} \pi_0(F) \xrightarrow{\pi_0(\iota)} \pi_0(\tilde{X}) \xrightarrow{\pi_0(p)} \pi_0(X) \rightarrow * \quad (*)$$

*Hier ist  $p_*$  ein Gruppenhomomorphismus, die anderen Abbildungen bilden Grundpunkte auf Grundpunkte ab.*

Man sagt auch, dass  $\ell$ ,  $\pi_0(\iota)$ ,  $\pi_0(p)$  Abbildungen von Mengen mit Grundpunkt sind.

*Beweis.* Die Aussage gilt für  $\pi_0(\iota)$  und  $\pi_0(p)$  wegen unserer Wahl der Grundpunkte. Die Existenz von Abbildung  $\ell$  haben wir in Korollar 2.12.3 gezeigt. Der Grundpunkt in  $\pi_1(X, p\tilde{x})$  ist das neutrale Element und hat einen nullhomotopen Weg  $w$  als Repräsentanten, der zu einem nullhomotopen Weg  $\tilde{w}$  hochgehoben wird. Da die Faser diskret ist, folgt  $\tilde{w}(1) = \tilde{x}$ . Somit geht ein nullhomotoper Weg  $w$  in  $X$  unter  $\ell$  auf den Grundpunkt  $f \in F$ .  $\square$

**Bemerkung 2.12.5.** Diese Sequenz von Abbildungen ist *natürlich*. Das bedeutet: Angenommen wir haben zwei Überlagerungen  $p : (\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) \rightarrow (X, x)$  und  $q : (\tilde{X}_2, \tilde{x}_2) \rightarrow (X, x)$  und eine Abbildung  $f : (\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) \rightarrow (\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$ , so dass  $q \circ f = p$ . Dann induziert  $f$  Abbildungen zwischen zwei Sequenzen wie in Satz 2.12.4 und das entstehende Diagramm kommutiert.

**Satz 2.12.6.** *Die Sequenz in Satz 2.12.4 ist exakt. Das bedeutet, dass das Urbild jedes Grundpunktes genau das Bild der vorhergehenden Abbildung ist.*

Explizit gelten also folgende Bedingungen:

1. Der Gruppenhomomorphismus  $\pi_1(p)$  ist injektiv.
2. Es gilt  $\text{Im } p_* = \ell^{-1}(f)$  in  $\pi_1(X, p\tilde{x})$ .
3. Es gilt  $\text{Im } \ell = \pi_0(\iota)^{-1}(\tilde{x})$  in  $\pi_0(F) \cong F$ .
4. Es gilt  $\text{Im } \pi_0(\iota) = \pi_0(p)^{-1}(p\tilde{x})$  in  $\pi_0(\tilde{X})$ .
5. Die Abbildung  $\pi_0(p)$  ist surjektiv.

*Beweis.* Aussage 1. ist Korollar 2.12.1.

Zu Aussage 2: Sei  $[w] \in \text{Im } p_*$ , d.h. es gibt einen *geschlossenen* Weg  $\tilde{w}$  in  $\tilde{X}$ , der den Weg  $w$  in  $X$  mit Anfangspunkt  $\tilde{x}$  hebt. Dann ist aber  $\ell([w]) = \iota^{-1}(\tilde{w}(1)) = \iota^{-1}(\tilde{x}) = f \in F$ .

Sei umgekehrt  $[w] \in \pi_1(X, p\tilde{x})$  mit  $\ell([w]) = f$ . Das heißt aber, dass es eine Hochhebung  $\tilde{w}$  von  $w$  gibt mit  $\tilde{w}(0) = \tilde{x}$  und  $\tilde{w}(1) = \tilde{x}$ , also einen geschlossenen Weg mit  $[\tilde{w}] \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$ . Dann gilt

$$[w] = [p \circ \tilde{w}] = p_*[\tilde{w}] .$$

Für Aussage 3 gilt: Ist  $f' \in \text{Im } \ell \subset F$ , so gibt es einen Weg  $\tilde{w}$  vom Grundpunkt  $\tilde{x}$  zu  $\iota(f')$ . Die Punkte  $\tilde{x}$  und  $\iota(f')$  liegen daher in der gleichen Zusammenhangskomponente von  $\tilde{X}$ , also  $\pi_0(\iota)(f) = \tilde{x}$ .

Sei umgekehrt  $f' \in F$  mit  $\pi_0(\iota)[f'] = [\tilde{x}]$ . Dann gibt es einen Weg  $\tilde{w} : I \rightarrow \tilde{X}$  mit  $\tilde{w}(0) = \tilde{x}$  und  $\tilde{w}(1) = \iota(f')$ . Dieser Weg ist eine Hochhebung des Wegs  $w := p \circ \tilde{w}$  in  $X$ . Der Endpunkt  $\iota(f')$  des Wegs  $\tilde{w}$  in  $\tilde{X}$  liegt in der Faser über  $\tilde{x}$ . Also ist der Weg  $w = p\tilde{w}$  in  $X$  geschlossen. Es gilt für diesen Weg  $\ell[p \circ \tilde{w}] = \iota(f')$ .

Zu Aussage 4: Ist  $\tilde{y} \in \text{Im } \iota \subset \tilde{X}$ , so liegt  $\tilde{y}$  über  $p\tilde{x}$ . Daher gilt sogar  $p\tilde{y} = p\tilde{x}$ .

Sei umgekehrt  $\tilde{y} \in \tilde{X}$  ein Repräsentant von  $[\tilde{y}] \in \pi_0(p)^{-1}(p\tilde{x})$ . D.h. es gilt  $[p\tilde{y}] = [p\tilde{x}]$  in  $\pi_0(X)$ ; daher gibt es einen Weg  $w : I \rightarrow X$  von  $p\tilde{y}$  nach  $p\tilde{x}$ . Im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \{\tilde{y}\} & \xrightarrow{w_0} & \tilde{X} \\ \downarrow \iota_0 & \nearrow H & \downarrow p \\ I & \xrightarrow{w} & X \end{array}$$

finde mit der Homotopiehochhebungseigenschaft von  $p$  einen Weg  $H$  in  $\tilde{X}$  mit Anfangspunkt  $H(0) = \tilde{y}$  und Endpunkt  $H(1)$  in der Faser über  $p\tilde{x}$ . Also ist  $\tilde{y}$  in der gleichen Wegkomponente von  $\tilde{X}$  wie ein Punkt in der Faser von  $p\tilde{x}$  und somit  $\tilde{y} \in \text{Im } \pi_0(\iota) = \text{Im } \iota$ .

Aussage 5. folgt, weil eine Überlagerung stets surjektiv ist.  $\square$

Nur für die erste Aussage haben wir verwendet, dass  $\tilde{X} \rightarrow X$  eine Überlagerung ist, alle anderen Aussagen gelten für allgemeine Faserungen. Für ein Faserbündel ist der Kern von  $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow \pi_1(X, p\tilde{x})$  das Bild von  $\pi_1(F, f)$ .

Sei nun  $G$  eine diskrete Gruppe mit einer Überlagerungswirkung auf  $\tilde{X}$ . Die typische Faser trägt in dieser Situation zusätzlich eine transitive und freie Wirkung der Gruppe  $G$  und die Wahl des Grundpunktes definiert eine Bijektion  $G \rightarrow F$  mit  $g \mapsto g^{-1} \cdot f$ . (A priori können wir natürlich auch  $g$  mit  $gf$  identifizieren, die Wahl des Inversen vereinfacht aber die folgende Theorie.) Wir identifizieren mit dieser Bijektion die typische Faser mit der Gruppe  $G$ . Insbesondere identifizieren wird den Grundpunkt von  $F$  mit dem neutralen Element von  $G$  ist.

Dann ist nach Satz 2.10.6  $\tilde{X} \xrightarrow{p} \tilde{X}/G$  eine Überlagerung mit typischer Faser  $G$ . Wir wählen Grundpunkte  $\tilde{x} \in \tilde{X}$ ,  $x = p\tilde{x} \in X$  und  $f = \iota^{-1}(\tilde{x})$ .

**Satz 2.12.7.** *In der soeben beschriebenen Situation gibt  $\ell$  einen Gruppenhomomorphismus  $\pi_1(X, x) \rightarrow G$ .*

*Beweis.* Seien  $w_i : I \rightarrow X$  für  $i = 1, 2$  Schleifen in  $X$  mit Anfangspunkt  $x$ . Seien  $\tilde{w}_1, \tilde{w}_2 : I \rightarrow \tilde{X}$  Hochhebungen mit gleichem Anfangspunkt  $\tilde{x}$ . Finde eindeutig bestimmte Elemente  $g_1, g_2 \in G$  mit  $g_i^{-1}\tilde{x} = \tilde{w}_i(1)$ . Dann ist nach unserer Konvention  $\ell[w_i] = g_i$ .

Der Weg  $g_1^{-1}\tilde{w}_2 \star \tilde{w}_1$  läuft von  $\tilde{x}$  über  $g_1^{-1}\tilde{x} = \tilde{w}_1(1)$  zu  $g_1^{-1}g_2^{-1}\tilde{x}$  und hebt den Weg  $w_2 \star w_1$  in  $X$  zu einem Weg in  $\tilde{X}$  mit Anfangspunkt  $\tilde{x}$  hoch. Daher ist

$$\ell(w_2 \star w_1) = g_1\tilde{w}_2 \star \tilde{w}_1(1) = g_1^{-1}g_2^{-1}\tilde{x} .$$

$$\text{Also gilt } \ell(w_2 \star w_1) = (g_1^{-1}g_2^{-1})^{-1} = g_2g_1 = \ell[w_2]\ell[w_1]. \quad \square$$

In der Vorlesung hatten wir in der Faser  $g.\tilde{x}$  mit  $g$  identifiziert und dann gezeigt, dass  $\ell$  ein Antihomomorphismus ist, der das Produkt nicht bewahrt, sondern die Faktoren vertauscht. Das ergibt einen Homomorphismus  $\pi_1(X, x) \rightarrow G^{op}$ , wobei die duale Gruppe  $G^{op}$  die Gruppe mit den gleichen Elementen wie  $G$  aber umgekehrter Multiplikation ist. Jede Gruppe ist allerdings zu ihrer dualen Gruppe durch  $g \mapsto g^{-1}$  isomorph, insofern bekommen wir auch einen Homomorphismus nach  $G$ . Die neue Konvention ist hoffentlich klarer. Ein Ursprung unserer Verwirrung war, dass wir in Definition 2.2.2  $w_2 \star w_1$  nicht als Durchlaufen von  $w_2$  gefolgt von  $w_1$  definiert haben (wie im Buch von Hatcher) sondern als Durchlaufen von  $w_1$  gefolgt von  $w_2$  (wie im Buch von Laures-Szymik).



**Korollar 2.12.8.** Für eine  $G$ -Überlagerung  $\tilde{X} \rightarrow X$  mit  $X$  wegzusammenhängend gilt  $\pi_0(\tilde{X}) \cong G/\ell(\pi_1(X, x))$ .

*Beweis.*  $G$  ist die typische Faser, wir haben also die exakte Sequenz  $\pi_1(X, x) \rightarrow G \rightarrow \pi_0(\tilde{X}) \rightarrow *$ . Also ist  $G \rightarrow \pi_0(\tilde{X})$  surjektiv. Indem wir den Grundpunkt durch verschiedenen Punkte von  $\tilde{X}$  laufen lassen, stellen wir fest, dass  $g, h \in G$  genau dann das gleiche Bild in  $\pi_0(\tilde{X})$  haben, wenn es  $[w] \in \pi_1(X, x)$  gibt mit  $h^{-1} = \ell[w].g^{-1}$ , also wenn  $g$  und  $h$  in der gleichen linken Nebenklasse von  $\ell(\pi_1(X, x))$  liegen.  $\square$

Die folgende Aussage haben wir schon einmal mit dem Satz von Seifert-van Kampen gezeigt, siehe Satz 2.8.2.

**Korollar 2.12.9.** Für den projektiven Raum  $\mathbb{R}P^n$  mit  $n \geq 2$  ist die Fundamentalgruppe  $\pi_1(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}_2$ .

*Beweis.* Wir betrachten die  $\mathbb{Z}_2$ -Überlagerung  $\mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$  und den induzierten Homomorphismus  $\ell$ . Nach Korollar 2.12.8 ist  $\ell$  surjektiv und da  $\pi_0(\mathbb{S}^n, 1) = 1$  ist der Kern von  $\ell$  trivial.  $\square$

Mit unseren Methoden und den bisherigen Ergebnissen lässt sich auch der folgende Satz beweisen, der beschreibt, wann sich allgemeinere stetige Funktionen  $Y \rightarrow X$  hochheben lassen.

**Satz 2.12.10.** Sei  $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$  eine Überlagerung und  $Y$  wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Sei  $f : Y \rightarrow X$  stetig. Wähle  $y_0 \in Y$  und  $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ , so dass  $f(y_0) = p\tilde{x}_0$  gilt.

Dann gibt es genau dann eine Hochhebung  $\tilde{f} : Y \rightarrow \tilde{X}$  von  $f$  mit  $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$ , falls die Bedingung

$$f_*\pi_1(Y, y_0) \subset p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$$

gilt.

*Beweis.* Die Idee ist die Folgende: Für jedes  $y \in Y$  wählen wir einen Weg  $w$  von  $y_0$  nach  $y$  und  $\tilde{f}(y) = \tilde{f} \circ \tilde{w}_{\tilde{x}_0}$ . Die Bedingung über Fundamentalgruppen stellt sicher, dass diese Konstruktion wohldefiniert ist.

Für Details siehe die Ergänzung zu Abschnitt 8.2 in Laures-Szymik oder Proposition 1.33 in Hatcher.  $\square$

## 2.13 Äquivalenz von Überlagerungen

Wir hatten bereits in Korollar 2.12.1 gesehen, dass für eine Überlagerung  $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$  mit Grundpunkt der Gruppenhomomorphismus  $p_* : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow \pi_1(X, p\tilde{x})$  injektiv ist.

**Definition 2.13.1.** Die Untergruppe  $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$  von  $\pi_1(X, p\tilde{x})$  heißt **charakterisierende Untergruppe** der Überlagerung  $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ .

**Beispiel 2.13.2.** Die charakterisierende Untergruppe hängt stark von der Wahl des Grundpunkts  $\tilde{x} \in \tilde{X}$  ab. Zum Beispiel betrachten wir die dreiblättrige Überlagerung von  $X = S^1 \vee S^1$  durch den Raum  $\tilde{X}$ , den wir durch Verklebung von vier Kreisen in einer Reihe erhalten. (Vgl. das Bild aus der Vorlesung.) Dann findet man zwei Urbilder  $x_1$  und  $x_2$  des Kreuzungspunktes von  $X$  und eine  $w$  eine Schleife in  $X$  so dass  $w \in p_*\pi_1(\tilde{X}, x_1)$ , aber  $w \notin p_*\pi_1(\tilde{X}, x_2)$ .

Wir können aber in gewissen Situationen die Abhängigkeit vom Grundpunkt  $\tilde{x} \in \tilde{X}$  kontrollieren:

**Satz 2.13.3.** Sei  $(\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow (X, x)$  eine Überlagerung. Sei  $\tilde{x}'$  ein Punkt in  $p^{-1}(x)$  und  $w$  ein Weg von  $\tilde{x}$  nach  $\tilde{x}'$ . Dann

Dann sind die charakterisierenden Untergruppen  $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$  und  $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}'))$  mittels  $[p \circ w]$  konjugiert.

*Beweis.* Wir hatten in Satz 2.2.12 gesehen, dass für die Fundamentalgruppe von  $\tilde{X}$  gilt

$$\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1) = [w]\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_2)[w]^{-1}.$$

Wenn man darauf  $p_*$  anwendet, folgt sofort die Aussage.  $\square$

**Satz 2.13.4.** Sei  $(\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow (X, x)$  eine Überlagerung und  $H$  eine Untergruppe von  $\pi_1(X, p\tilde{x})$ , die zu einer charakterisierenden Untergruppe  $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$  konjugiert ist. Dann gibt es einen Punkt  $\tilde{x}' \in p^{-1}(p\tilde{x})$ , so dass  $H = p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}'))$  gilt.

*Beweis.* Es gelte

$$H = \alpha^{-1} \cdot p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \cdot \alpha$$

mit  $\alpha := [w] \in \pi_1(X, p\tilde{x})$ . Sei nun  $\tilde{w}$  eine Hochhebung des geschlossenen Wegs  $w$  in  $\tilde{X}$  mit Startpunkt  $\tilde{x} \in \tilde{X}$ . Setze  $\tilde{x}' := \tilde{w}(1)$ . Dann ist

$$H = \underbrace{p_*[\tilde{w}]^{-1}}_{\alpha^{-1}} \cdot p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \cdot \underbrace{p_*[\tilde{w}]}_{\alpha} = p_*\left([\tilde{w}]^{-1} \star \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \star [\tilde{w}]\right) = p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}')).$$

$\square$

Wir definieren daher:

**Definition 2.13.5.** Sei  $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$  eine Überlagerung, für die  $\tilde{X}$  wegzusammenhängend ist. Für  $x \in X$  nennen wir die Konjugationsklasse von Untergruppen von  $\pi_1(X, x)$

$$C(\tilde{X}, p) =: \{p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \mid \tilde{x} \in p^{-1}(x)\}$$

die **charakterisierende Konjugationsklasse** der Überlagerung  $p$ .

Diese verdient wegen des folgenden Satzes wirklich ihren Namen:

**Satz 2.13.6.** Zwei wegzusammenhängende Überlagerungen  $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$  und  $\tilde{X}' \xrightarrow{p'} X$  eines lokal wegzusammenhängenden Raumes sind genau dann äquivalent, wenn ihre charakterisierenden Konjugationsklassen gleich sind,  $C(\tilde{X}, p) = C(\tilde{X}', p')$ .

*Beweis.* Zunächst sei eine Äquivalenz  $\tilde{X} \xrightarrow{f} \tilde{X}'$  gegeben,

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow[\sim]{f} & \tilde{X}' \\ & \searrow p & \swarrow p' \\ & X & \end{array}$$

Dann ist wegen  $p = p' \circ f$

$$p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})) = p'_* \circ f_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) = p'_*(\pi_1(\tilde{X}', f\tilde{x})).$$

Wegen Satz 2.13.3 sind dann die Untergruppen  $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$  und  $p'_*(\pi_1(\tilde{X}', \tilde{x}'))$  für jede Wahl der Grundpunkte konjugiert.

Seien für zwei Überlagerungen die charakterisierenden Konjugationsklassen gleich. Wähle  $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$  fest. Dann ist  $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$  eine Untergruppe in der Konjugationsklasse  $C(\tilde{X}, p) = C(\tilde{X}', p')$ . Für die Überlagerung  $p'$  finden wir nach Satz 2.13.4 einen Punkt  $\tilde{x}' \in (p')^{-1}(x)$ , so dass gilt

$$p(\tilde{x}) = p'(\tilde{x}') \quad \text{und} \quad p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) = p_*\pi_1(\tilde{X}', \tilde{x}') .$$

Mit  $X$  sind auch die Totalräume  $\tilde{X}$  und  $\tilde{X}'$  lokal wegzusammenhängend. Weil  $\tilde{X}$  und  $\tilde{X}'$  lokal wegzusammenhängend sind, gibt es nach Satz 2.12.10 Abbildungen

$$\tilde{p} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}' \quad \text{und} \quad \tilde{p}' : \tilde{X}' \rightarrow \tilde{X} ,$$

so dass die Diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & \tilde{X}' \\ & \nearrow \tilde{p} & \downarrow p' \\ \tilde{X} & \xrightarrow{p} & X \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} & & \tilde{X} \\ & \nearrow \tilde{p}' & \downarrow p \\ \tilde{X}' & \xrightarrow{p'} & X \end{array}$$

kommutieren und  $\tilde{p}(\tilde{x}) = \tilde{x}'$  und  $\tilde{p}'(\tilde{x}') = \tilde{x}$  gilt.

Die Abbildung  $\tilde{p}' \circ \tilde{p}$  bildet  $\tilde{x}$  auf  $\tilde{x}$  ab, genau wie  $\text{id}_{\tilde{X}}$ . Aus Lemma 2.11.2 folgt daher  $\tilde{p}' \circ \tilde{p} = \text{id}_{\tilde{X}}$ ; genauso folgt  $\tilde{p} \circ \tilde{p}' = \text{id}_{\tilde{X}'}$ . Damit sind die Überlagerungen äquivalent.  $\square$

**Bemerkung 2.13.7.** Mit dem gleichen Beweis sind zwei Überlagerungen mit Grundpunkt  $(\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow (X, x)$  und  $(\tilde{X}', \tilde{x}') \rightarrow (X, x)$  genau dann äquivalent (d.h. es gibt einen Homöomorphismus  $\tilde{X} \rightarrow \tilde{X}'$  über  $X$ , der  $\tilde{x}$  nach  $\tilde{x}'$  abbildet), wenn ihre charakterisierenden Untergruppen gleich sind.

## 2.14 Die universelle Überlagerung

**Definition 2.14.1.** Eine wegzusammenhängende Überlagerung  $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$  heißt **universell**, wenn der Totalraum  $\tilde{X}$  einfach-zusammenhängend ist.

**Satz 2.14.2.** *Es sei  $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$  eine wegzusammenhängende Überlagerung und  $x \in X$ . Die folgenden Aussagen sind dann äquivalent:*

1. Die Überlagerung  $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$  ist universell.
2. Die charakterisierende Konjugationsklasse ist trivial,  $C(\tilde{X}, p) = \{1\} \subset \pi_1(X, x)$ .
3. Ist  $w : I \rightarrow X$  ein geschlossener Weg in  $X$  mit  $w(0) = w(1) = x$  und ist  $\tilde{w} : I \rightarrow \tilde{X}$  eine Hochhebung von  $w$ , so ist  $\tilde{w}$  nur geschlossen, wenn  $w$  nullhomotop ist.

*Beweis.*

1.  $\Rightarrow$  2. Die charakterisierende Konjugationsklasse ist nach Definition

$$C(\tilde{X}, p) = \{p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \mid \tilde{x} \in p^{-1}(x)\}$$

und  $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) = \{1\}$ , da  $\tilde{X}$  einfach zusammenhängend ist.

2.  $\Rightarrow$  3. Sei  $\tilde{w}$  eine geschlossene Hochhebung von  $w$ . Dann ist  $[\tilde{w}] \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) = \{1\}$  das neutrale Element und somit auch  $p_*[\tilde{w}] = 1 = [w]$ , also ist  $w$  nullhomotop.

3.  $\Rightarrow$  1. folgt, da  $p_*$  nach Korollar 2.12.1.2 injektiv ist.

□

### Bemerkungen 2.14.3.

1. Die Wahl von  $x \in X$  ist für die Aussagen unerheblich.
2. Ist  $X$  lokal wegzusammenhängend und sind  $\tilde{X}$  und  $\tilde{X}'$  universelle Überlagerungen, so ist  $\tilde{X}$  wegen Satz 2.13.6 äquivalent zu  $\tilde{X}'$  (aber nicht kanonisch äquivalent). Wir nennen  $\tilde{X}$  dann auch *die* universelle Überlagerung von  $X$ .

### Beispiele 2.14.4.

1. Der Kreis  $\mathbb{S}^1$  hat die universelle Überlagerung  $\exp(2\pi i -) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ .
2. Der Torus  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  hat die universelle Überlagerung  $\mathbb{R}^2$ .
3. Die universelle Überlagerung des Bouquet  $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$  ist ein unendlicher Baum in dem jede Ecke Grad 4 hat.
4. Der projektive Raum  $\mathbb{R}P^n$  hat für  $n \geq 2$  die Sphäre  $\mathbb{S}^n$  als universelle Überlagerung, denn nach Korollar 2.7.1.2 ist  $\mathbb{S}^n$  für  $n \geq 2$  einfach zusammenhängend. (Für  $n = 1$  ist  $\mathbb{R}P^1 = \mathbb{S}^1/\pm \cong \mathbb{S}^1$ .)

Wir wollen eine große Klasse von topologischen Räumen finden, die universelle Überlagerungen haben.

**Definition 2.14.5.** Ein Raum  $X$  heißt **semi-lokal einfach-zusammenhängend**, falls es für jedes  $x \in X$  eine Umgebung  $U \in \mathcal{U}(x)$  gibt, so dass jeder geschlossene Weg in  $U$  nullhomotop in  $X$  ist.

Man beachte, dass die Homotopie  $U$  verlassen kann, die Umgebung  $U$  muss also nicht einfach zusammenhängend sein.

**Beispiel 2.14.6.** Der Kegel über dem Hawaiischen Ohrring  $\prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{S}^1$  ist ein Beispiel für einen semi-lokal einfach zusammenhängend Raum, der nicht lokal einfachzusammenhängend ist.

### Bemerkungen 2.14.7.

1. Ein topologischer Raum habe die Eigenschaft, dass es für jeden Punkt eine in  $X$  zusammenziehbare Umgebung gibt. Dann ist  $X$  semi-lokal einfach-zusammenhängend. Dies gilt zum Beispiel für Mannigfaltigkeiten.
2. Es existiere eine universelle Überlagerung  $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$  eines topologischen Raums  $X$ . Dann hat jede trivialisierende Umgebung eines Punktes  $x \in X$  die Eigenschaft aus der Definition. Denn  $p$  ist ein lokaler Homöomorphismus und  $p^{-1}|_U(w)$  ist in  $\tilde{X}$  zusammenziehbar. Das Bild unter  $p$  ist dann eine Homotopie in  $X$ , die zeigt, dass  $w$  in  $X$  nullhomotop ist.

Es macht also nur Sinn, nach universellen Überlagerungen für semi-lokal einfach-zusammenhängende Räume zu suchen. Der Bequemlichkeit halber vereinbaren wir:

**Definition 2.14.8.** Ein Raum  $X$  heißt **hinreichend zusammenhängend**, wenn er wegzusammenhängend, lokal wegzusammenhängend und semi-lokal einfach-zusammenhängend ist.

Wir können nun die Existenz universeller Überlagerungen für hinreichend zusammenhängende Räume zeigen:

**Satz 2.14.9.** *Jeder hinreichend zusammenhängende Raum  $X$  hat eine universelle Überlagerung.*

Bevor wir mit dem technisch anspruchsvollen Beweis beginnen, ein paar Worte zur Idee.

Mit der exakten Sequenz aus Satz 2.12.4 ist ersichtlich, dass die typische Faser der universellen Überlagerung gleich äquivalent  $\pi_1(X, x)$  sein sollte (für irgendeine Wahl von  $x \in X$ ).

Wir könnten zuerst raten, dass die Faser über  $y$  dann  $\pi_1(X, y)$  sein soll, aber das erlaubt es nicht, die Fasern stetig mit dem Punkt in  $X$  zu variieren. Stattdessen soll die Faser über  $y$  aus den Homotopieklassen von Wegen von  $x$  nach  $y$  bestehen. (Ein beliebiger Weg von  $y$  nach  $x$  induziert den Isomorphismus mit der typischen Faser  $\pi_1(X, x)$ .)

Als nächstes müssen wir die Menge all dieser Homotopieklassen topologisieren. Das klingt schwierig, aber da ja für eine Überlagerung alle Fasern diskret sein sollen, definiert sich die Topologie von selbst.

*Beweis.* Wir führen den Plan aus, den wir soeben skizziert haben.

Wir wählen einen Grundpunkt  $x \in X$  und betrachten die Menge

$$\tilde{X} := \{(y, [w]) \mid y \in X, [w] \in F(y)\}$$

Wobei wir  $F(y)$  für die Menge der Homotopieklassen von Wegen vom Grundpunkt  $x$  nach  $y$  relativ zu den Endpunkten schreiben. Also  $[w] \in [(I, \{0, 1\}); (X, \{x, y\})]$  mit  $w(0) = x$  und  $w(1) = y$ . Die Abbildung

$$p : \begin{array}{ccc} \tilde{X} & \rightarrow & X \\ (y, [w]) & \mapsto & y \end{array} .$$

ist eine Surjektion, weil  $X$  wegzusammenhängend ist.

Wir müssen  $\tilde{X}$  so mit einer Topologie versehen, dass  $p$  zu einer Überlagerung wird, und dann nachweisen, dass  $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) = 1$  gilt.

Für  $y \in X$  sei  $U$  eine offene Umgebung  $U \in \mathcal{U}(y)$ , die wegzusammenhängend ist und so dass alle Schleifen in  $U$  zusammenziehbar in  $X$  sind.

Für  $(y', [w]) \in p^{-1}(U)$ , also für  $y' \in U$ , sei  $v_{y'}^y$  ein Weg von  $y'$  nach  $y$ , der in  $U$  verläuft. Ein solcher Weg existiert, weil die Umgebung  $U$  wegzusammenhängend gewählt wurde. Setze

$$h : \begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \rightarrow & U \times F(y) \\ (y', [w]) & \mapsto & (y', [v_{y'}^y \star w]) \end{array}$$

Dann ist  $h$  eine Bijektion und  $h$  ist unabhängig von der Wahl von  $v_{y'}^y$ , weil jeder geschlossene Weg in  $U$  in  $X$  nullhomotop ist.

- Für  $\alpha \in F(y)$  setze

$$V(U, \alpha) := h^{-1}(U \times \{\alpha\}) = \{(y', [w]) \mid y' \in U \text{ und } [v_{y'}^y \star w] = \alpha\}.$$

Es gilt

$$\begin{array}{ccc} V(U, \alpha) & \xrightarrow{h} & U \times \{\alpha\} \\ & \searrow p|_{V(U, \alpha)} & \swarrow \pi_1 \\ & & U \end{array}$$

Insbesondere ist  $p|_{V(U, \alpha)}$  bijektiv, da  $h$  und  $\pi_1$  bijektiv sind. Wir topologisieren  $V(U, \alpha)$  so, dass  $p|_{V(U, \alpha)}$  ein Homöomorphismus wird.

- Es ist klar, dass die Familie der Mengen  $V(U, \alpha)$  den Raum  $\tilde{X}$  überdeckt.
- Wir betrachten Schnitte:

$$\begin{aligned} V(U, \alpha) \cap V(U', \beta) &= \{(z, [w]) \text{ mit } z \in U, \alpha = [v_z^y \star w]\} \\ &\quad \cap \{(z', [w']) \text{ mit } z' \in U', \beta = [v_{z'}^y \star w']\} \end{aligned}$$

Ist  $U \cap U' = \emptyset$ , so ist der Schnitt  $V(U, \alpha) \cap V(U', \beta)$  leer. Ist der Schnitt  $U \cap U'$  dagegen nicht leer, so ist  $V(U, \alpha) \cap V(U', \beta)$  von der Form  $V(U \cap U', \gamma)$  für ein geeignetes  $\gamma \in F(y)$ , denn aus  $(z, [w]) = (z', [w'])$  folgt  $[v_z^y \star w] = [v_{z'}^y \star w'] =: \gamma$ .

Damit bilden die  $V(U, \alpha)$  eine Basis einer Topologie auf der Menge  $\tilde{X}$ .

Nach Konstruktion ist  $p$  für diese Topologie stetig und lokal trivial, denn  $p^{-1}(U) = \cup_{\alpha \in F(y)} V(U, \alpha)$ . Damit ist  $p$  eine Überlagerung.

Sei nun  $w$  ein geschlossener Weg in  $X$  und  $\tilde{w}$  eine Hochhebung zu einem Weg in  $\tilde{X}$ . Wir zeigen, dass  $\tilde{w}$  genau dann geschlossen ist, wenn  $w$  nullhomotop ist. Nach Satz 2.14.2 folgt dann, dass  $\tilde{X}$  die universelle Überlagerung ist.

Da es nach Bemerkung 2.14.3.1 nicht auf die Wahl von Grundpunkten ankommt, sei  $\tilde{w}(0) = (x, [c_x]) = \tilde{w}(1)$ . Wir können den Weg  $\tilde{w} : I \rightarrow \tilde{X}$  schreiben als  $\tilde{w}(t) = (x_t, [w'_t])$ , wobei  $w'_t$  für jedes  $t \in I$  ein Weg mit Anfangspunkt  $w'_t(0) = x$  und Endpunkt  $w'_t(1) = x_t$  ist. Wir werden nun  $x_t$  und  $[w'_t]$  explizit konstruieren.

Aus  $p\tilde{w} = w$  folgt  $w(t) = x_t$  für alle  $t \in I$ , also  $\tilde{w}(t) = (w(t), [w'_t])$ . Der Weg  $w'_t$  hat Anfangspunkt  $x$  und Endpunkt  $w(t)$ . Betrachte nun  $w'_t(s) = w(t \cdot s)$ . Auch  $(w(t), [w'_t])$  hebt den Weg  $w$  in  $X$  zu einem Weg in  $\tilde{X}$ . Mit der Eindeutigkeit der Hochhebung von Wegen folgt  $\tilde{w}(t) = (w(t), [w'_t])$  und  $w_1 = w$ .

Daher ist die Bedingung  $\tilde{w}(1) = \tilde{w}(0)$  äquivalent zu  $(w(0), [c_x]) = (w(1), [w])$ . Das ist aber äquivalent zu  $[w] = [c_x]$ , so dass die Behauptung gezeigt ist.  $\square$

## 2.15 Deckbewegungen

### Definition 2.15.1.

1. Eine Selbstäquivalenz einer Überlagerung  $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$  heißt **Deckbewegung**. Eine Deckbewegung ist ein Homöomorphismus  $f : \tilde{X} \xrightarrow{\cong} \tilde{X}$  über  $X$ , also  $p \circ f = p$ .

2. Die Menge

$$D(\tilde{X}, p) := \{f : \tilde{X} \xrightarrow{\cong} \tilde{X} \mid p \circ f = p\}$$

ist eine Gruppe, die **Deckbewegungsgruppe** der Überlagerung  $p$ .

**Satz 2.15.2.** Gegeben sei eine Überlagerungswirkung einer diskreten Gruppe  $G$  auf einem wegzusammenhängenden Raum  $\tilde{X}$ . Dann ist für die Überlagerung  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  aus Satz 2.10.6 die Deckbewegungsgruppe gleich  $G$ , also  $D(\tilde{X}, p) = G$ .

*Beweis.* Es ist klar, dass  $G \subset D(\tilde{X}, p)$  gilt, denn für jedes  $g \in G$  kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{g} & \tilde{X} \\ & \searrow p & \swarrow p \\ & \tilde{X}/G & \end{array}$$

Sei umgekehrt  $f : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$  eine Deckbewegung, also  $p \circ f = p$ . Wähle  $\tilde{x} \in \tilde{X}$ . Dann ist  $p \circ f(\tilde{x}) = p\tilde{x}$ . Also existiert  $g \in G$  mit  $f(\tilde{x}) = g\tilde{x}$ . Da  $\tilde{X}$  wegzusammenhängend ist folgt nun mit Satz 2.11.2, dass  $f = g$  gilt.  $\square$

**Beispiel 2.15.3.** Die universelle Überlagerung  $\mathbb{R}^n \xrightarrow{p} \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$  des  $n$ -dimensionalen Torus hat die Deckbewegungsgruppe  $D(\mathbb{R}^n, p) = \mathbb{Z}^n$ .

Umgekehrt gilt:

**Satz 2.15.4.** Ist  $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$  eine Überlagerung und  $\tilde{X}$  wegzusammenhängend, so operiert die Deckbewegungsgruppe  $D(\tilde{X}, p)$  als Überlagerungswirkung auf dem Totalraum  $\tilde{X}$ .

*Beweis.* Sei  $f \in D(\tilde{X}, p)$ . Sei  $\tilde{x} \in \tilde{X}$  beliebig. Wähle eine trivialisierende Umgebung  $U$  von  $p\tilde{x}$ . Sei  $\tilde{U}$  der Summand des Urbilds  $p^{-1}(U)$ , der  $\tilde{x}$  enthält. Dann ist  $p|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \rightarrow U$  ein Homöomorphismus.

Angenommen, es gibt  $\tilde{y} \in \tilde{U}$  mit  $f(\tilde{y}) \in \tilde{U}$ . Dann ist  $p\tilde{y} = pf\tilde{y}$ . Aber  $p|_{\tilde{U}}$  ist ein Homöomorphismus, also folgt  $\tilde{y} = f(\tilde{y})$ . Mit Satz 2.11.2 folgt wieder  $f = \text{id}_{\tilde{X}}$ , da beide Abbildungen Hohebungen von  $p$  sind. Damit erfüllt jede trivialisierende Umgebung die Bedingung für eine Überlagerungswirkung in Definition 2.9.8.  $\square$

**Bemerkung 2.15.5.** Ist  $G$  eine Gruppe und  $H$  eine Untergruppe von  $G$ , so ist der **Normalisator** von  $H$  in  $G$

$$N_G(H) := \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\} .$$

$N_G(H)$  ist als die maximale Untergruppe von  $G$ , so dass  $H$  eine normale Untergruppe von  $N_G(H)$  ist. Insbesondere gilt  $N_G(1) = G$ . Wir schreiben auch  $N(H)$  wenn  $G$  aus dem Zusammenhang klar ist.

**Satz 2.15.6.** Sei  $X$  lokal wegzusammenhängend und  $(\tilde{X}, \tilde{x}) \xrightarrow{p} (X, x)$  eine wegzusammenhängende Überlagerung mit Grundpunkt. Es gibt einen Isomorphismus:

$$\varphi : N_{\pi_1(X, x)}(p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})) / p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \xrightarrow{\sim} D(\tilde{X}, p) .$$

*Beweisidee.* Die Idee ist, dass jedes  $[w] \in N(p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})))$  eine Hochhebung  $\tilde{w}_{\tilde{x}}$  hat. Dann ordnen wir  $[w]$  die Decktransformation  $\phi(w)$  zu, die wir als Hochhebung von  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  mit Anfangspunkt  $\phi(w)(\tilde{x}) = \tilde{w}_{\tilde{x}}(1)$  definieren. Hierzu benutzen wir Satz 2.12.10.

$$\begin{array}{ccc} & & \tilde{X} \\ & \nearrow \phi(w) & \downarrow p \\ \tilde{X} & \xrightarrow{p} & X \end{array}$$

Damit die Bedingung für Fundamentalgruppen gilt, muss  $[w]$  im Normalisator von  $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$  liegen.

Für die Details verweisen wir auf Proposition 1.39 in Hatcher, oder Christoph Schweigerts Skript.  $\square$

**Korollar 2.15.7.** *Es sei  $(X, x)$  ein lokal wegzusammenhängender Raum mit Grundpunkt und  $p : (\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow (X, x)$  eine universelle Überlagerung.*

*Dann gibt es einen Isomorphismus von Gruppen*

$$\pi_1(X, p\tilde{x}) \xrightarrow{\varphi} D(\tilde{X}, p).$$

*Beweis.* Es  $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) = 1$  und der Normalisator der trivialen Untergruppe ist die ganze Gruppe.  $\square$

Man kann also Fundamentalgruppen als Deckbewegungsgruppen universeller Überlagerungen berechnen.

**Definition 2.15.8.** Eine Überlagerung  $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$  heißt **regulär**, falls für jedes  $\tilde{x} \in \tilde{X}$  die Untergruppe  $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$  eine normale Untergruppe in  $\pi_1(X, p)$  ist.

Für wegzusammenhängende reguläre Überlagerungen erhalten wir aus Satz 2.15.6 den Gruppenisomorphismus

$$\varphi : \pi_1(X, p\tilde{x}) / p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \xrightarrow{\cong} D(\tilde{X}, p) .$$

**Beispiele 2.15.9.**

1. Universelle Überlagerungen sind regulär, denn die triviale Untergruppe ist stets ein Normalteiler.
2. Zweiblättrige Überlagerungen sind regulär, denn Untergruppen vom Index 2 sind immer normal.
3. Jede  $G$ -Überlagerung ist regulär. Betrachte eine Wegkomponente  $Y$  mit Grundpunkt  $y$  über  $x$ . Dann ist  $(p_\phi)_*\pi_1(Y, y) = \ker(\ell) \triangleleft \pi_1(X, x)$ .

Den Beweis des folgenden Satzes überlassen wir als Übung:

**Satz 2.15.10.** *Sei  $\tilde{X}$  wegzusammenhängend,  $X$  lokal wegzusammenhängend und  $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$  eine Überlagerung. Dann ist  $p$  regulär, genau wenn  $D(\tilde{X}, p)$  transitiv auf  $F = p^{-1}(x)$  operiert.*

*Beweis.* Den Beweis überlasse ich Ihnen als Übung.  $\square$



## 2.16 Klassifikationssatz für Überlagerungen

Wir konstruieren zunächst aus der universellen Überlagerung eine Klasse von Überlagerungen hinreichend zusammenhängender Räume.

**Satz 2.16.1.** *Ist  $(X, x)$  ein hinreichend zusammenhängender Raum mit Grundpunkt. Dann gibt es zu jeder Untergruppe  $H < \pi_1(X, x)$  eine wegzusammenhängende Überlagerung  $p_H : (X_H, x_H) \rightarrow (X, x)$  mit*

$$p_{H*}\pi_1(X_H, x_H) = H .$$

*Beweisidee.* Nach Satz 2.14.9 existiert die universelle Überlagerung  $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$  von  $X$  und wir wählen einen Grundpunkt  $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ . Wegen Korollar 2.15.7 haben wir einen Isomorphismus

$$\varphi : \pi_1(X, x) \rightarrow D(\tilde{X}, p) .$$

Daher ist  $\varphi(H)$  eine Untergruppe der Deckbewegungsgruppe  $D(\tilde{X}, p)$ . Sei  $X_H := \tilde{X}/\varphi(H)$  der Quotientenraum; definiere eine Abbildung

$$p_H : \begin{array}{ccc} X_H & \rightarrow & X \\ [y] & \mapsto & p(y) . \end{array}$$

Die Abbildung  $p_H$  ist offensichtlich wohldefiniert, surjektiv und stetig. Als Grundpunkt von  $X_H$  wählen wir  $x_H := \pi(\tilde{x})$ . Es gilt  $p_H(x_H) = x$ . Mit der kanonischen Projektion  $q : \tilde{X} \rightarrow X_H$  auf den Quotientenraum haben wir die folgende Situation: die universelle Überlagerung  $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$  faktorisiert über

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & & \\ \downarrow p & \searrow q & \\ & X_H = \tilde{X}/\varphi(H) & \\ & \swarrow p_H & \\ & X & \end{array}$$

Es ist noch zu zeigen, dass  $p_H$  tatsächlich eine Überlagerung ist mit  $p_{H*}(\pi_1(X_H, \tilde{x}_H)) = H$ , was wir als Übung belassen. (Oder lesen Sie in Christoph Schweigerts Skript nach.)

Kurz gesagt: Eine Umgebung in  $X$  über der  $p$  trivial ist, wird auch  $p_H$  trivialisieren. Für die Fundamentalgruppe vergleichen wir Hochhebungen eines geschlossenen Weges in  $X$  nach  $X_H$  und nach  $\tilde{X}$ . □

Für jede Untergruppe  $H < \pi_1(X, x)$  faktorisiert also die universelle Überlagerung  $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$  über

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & & \\ \downarrow p & \searrow q & \\ & X_H = \tilde{X}/\varphi(H) & \\ & \swarrow p_H & \\ & X & \end{array}$$

Umgekehrt sind alle wegzusammenhängenden Überlagerungen von dieser Form:

**Satz 2.16.2.** *Sei  $X$  hinreichend zusammenhängend und  $p' : (\hat{X}, \hat{x}) \rightarrow (X, x)$  eine wegzusammenhängende Überlagerung. Dann überlagert die universelle Überlagerung  $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$  den Totalraum  $\hat{X}$ .*

*Beweis.* Wir wählen einen Grundpunkt  $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$  für die universellen Überlagerung. Dann ist

$$H := p'_*\pi_1(\hat{X}, \hat{x}) < \pi_1(X, x)$$

eine Untergruppe. Wir betrachten

$$\tilde{X} \rightarrow \tilde{X}/\varphi(H) =: X_H$$

das ist nach Satz 2.10.6 eine Überlagerung und wir wollen zeigen, dass  $X_H$  äquivalent zu  $\hat{X}$  ist.

Nach Satz 2.16.1 ist  $p_H : X_H \rightarrow X$  eine Überlagerung mit Untergruppe  $p_{H*}\pi_1(X_H, \pi(\tilde{x})) = H$ . Also haben  $\hat{X}$  und  $X_H$  die gleiche charakterisierende Untergruppe und nach Satz 2.13.6 sind die beiden Überlagerungen äquivalent.  $\square$

Damit erhalten wir

**Theorem 2.16.3** (Klassifikationssatz für wegzusammenhängende Überlagerungen). *Sei  $X$  hinreichend zusammenhängend und  $x \in X$ . Dann gibt es natürliche Bijektionen*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Äquivalenzklassen wegzusammen-} \\ \text{hängender Überlagerungen von } X \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Konjugationsklassen von} \\ \text{Untergruppen von } \pi_1(X, x) \end{array} \right\}$$

*Reguläre Überlagerungen entsprechen hierbei normalen Untergruppen.*

*Beweis.* Wir weisen einer Überlagerung  $\hat{X} \xrightarrow{p'} X$  die Konjugationsklasse der Untergruppe  $p'_*\pi_1(\hat{X}, \hat{x})$  wie in Definition 2.13.5 zu. Einer Untergruppe  $H < \pi_1(X, x)$  weisen wir die in Satz 2.16.1 konstruierte Überlagerung zu.

Aus Satz 2.16.1 folgt sofort, dass die Abbildung  $\rightarrow \circ \leftarrow$  die Identität ist, also  $\rightarrow$  surjektiv und  $\leftarrow$  injektiv ist. Die Surjektivität von  $\leftarrow$  wurde in 2.16.2 gezeigt.  $\square$

#### Bemerkungen 2.16.4.

1. Untergruppen von  $\pi_1(X, x)$  stehen in natürlicher Bijektion mit Äquivalenzklassen von wegzusammenhängenden Überlagerungen mit Grundpunkt, vgl. Bemerkung 2.13.7.
2. Ist  $X$  hinreichend zusammenhängend und  $\pi_1(X, x) \cong \{1\}$ , so hat  $X$  nur triviale Überlagerungen  $X \xrightarrow{\sim} X$ .
3. Man nennt Theorem 2.16.3 auch *Galoiskorrespondenz*, aufgrund der formalen Ähnlichkeit mit dem Hauptsatz der Galoistheorie.

In der Galoistheorie beschäftigt man sich zuerst mit einer festen galoisschen Körpererweiterung  $K/L$  und vergleicht die Untergruppen der

Galois-Gruppe  $\text{Gal}(K/L)$  mit den Zwischenkörpern. Auf der topologischen Seite entspricht  $K/L$  einer (nicht universellen) regulären Überlagerung. Das Galois-Äquivalent zur universellen Überlagerung ist ein separabler algebraischer Abschluss. Die Galois-Gruppe eines separablen algebraischen Abschlusses über einem Körper heißt *absolute Galois-Gruppe*. Die absolute Galois-Gruppe der rationalen Zahlen ist  $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ , wobei  $\bar{\mathbb{Q}}$  algebraischer Abschluss von  $\mathbb{Q}$  ist. Niemand kennt eine explizite Beschreibung dieser Gruppe.

Die absolute Galois-Gruppe ist ein Limes endlicher Gruppen und erhält dadurch eine Topologie. Die endlichen Körpererweiterungen werden dann von den abgeschlossenen Untergruppen der absoluten Galois-Gruppe klassifiziert.

**Beispiele 2.16.5.**

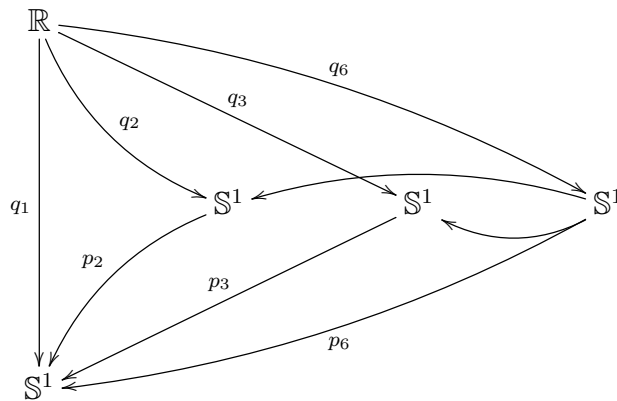
1. Es gilt  $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1) = \mathbb{Z}$ . Alle Untergruppen von  $\mathbb{Z}$  sind von der Form  $n\mathbb{Z}$  mit  $n \in \mathbb{N}$ . Bis auf Äquivalenz gibt es daher nur die Überlagerungen

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{S}^1 \\ t & \mapsto & \exp(2\pi i n t) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} p_n : \mathbb{S}^1 & \rightarrow & \mathbb{S}^1 \\ z & \mapsto & z^n \end{array}$$

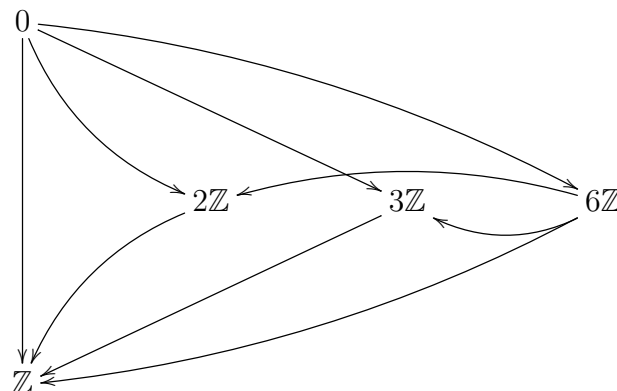
Die folgenden Überlagerungen sind alle isomorph zur ersten Überlagerung

$$\begin{array}{ccc} q_n : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{S}^1 \\ t & \mapsto & [t] \end{array}$$

Wir haben den folgenden Turm von Überlagerungen:



Man beachte, dass dies dem folgenden Diagramm im Untergruppenverband der Fundamentalgruppe  $\mathbb{Z}$  entspricht:



Für die Deckbegungsgruppe von  $p_n : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  finden wir  $D(\mathbb{S}^1, p_n) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1, 1)/(p_n)_*(\mathbb{S}^1, 1) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

2. Ist  $X$  hinreichend zusammenhängend und  $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}_2$ , so hat  $X$  bis auf Äquivalenz nur eine nicht-triviale wegzusammenhängende Überlagerung. Dies trifft zum Beispiel auf  $X = \mathbb{R}P^n$  mit  $n \geq 2$  zu; die einzige nicht-triviale wegzusammenhängende Überlagerung ist  $\mathbb{S}^n$ . Dies ist auch die universelle Überlagerung, weil  $\mathbb{S}^n$  für  $n \geq 2$  einfach zusammenhängend ist.
3. Der topologische Raum  $X = \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$  hat sehr viele Überlagerungen, weil seine Fundamentalgruppe  $\pi_1(X, x) = \mathbb{Z} \star \mathbb{Z}$ , vgl. Beispiel 2.7.3.1, sehr viele Untergruppen hat.
4. Im vorherigen Beispiel gilt, dass alle Untergruppen von  $\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}$  frei sind. Allgemein gilt, dass alle Untergruppen einer freien Gruppe frei sind. Dies ist der *Satz von Nielsen-Schreier*, ein wichtiges (und nicht-triviales!) Resultat der Gruppentheorie, das sich rein topologisch beweisen lässt.

Wir erinnern uns hierzu, dass  $F_n$  die Fundamentalgruppe von  $\bigvee_{i=1}^n \mathbb{S}^1$  ist.  $\bigvee_{i=1}^n \mathbb{S}^1$  ist ein 1-dimensionaler CW-Komplex. (Man nennt 1-dimensionale CW-Komplexe auch *Graphen*.)

Nun brauchen wir zwei topologischen Fakten:

- (a) Jede Überlagerung eines 1-dimensionalen CW-Komplexes ist selbst ein 1-dimensionaler CW-Komplex.
- (b) Jeder 1-dimensionale CW-Komplex ist homotopie-äquivalent zu einem Bouquet von Kreisen.

Man muss bei den Beweisen etwas sorgfältig sein, aber diese Resultate sollten nicht überraschend sein. Nun wissen wir, dass jede Untergruppe  $H$  von  $F_n$  die Fundamentalgruppe einer Überlagerung von  $\bigvee_{i=1}^n \mathbb{S}^1$  ist. Und dann folgt aus (a) und (b), dass  $H$  frei ist.

## 2.17 $G$ -Überlagerungen

Analog zu Theorem 2.16.3 können auch  $G$ -Überlagerungen klassifizieren.

Wir wissen aus Satz 2.12.7, dass eine  $G$ -Überlagerung einen Homomorphismus  $\ell : \pi_1(X, x_0) \rightarrow G$  induziert. Der nächste Satz zeigt, dass umgekehrt jeder Homomorphismus  $\pi_1(X, x_0) \rightarrow G$  eine Überlagerung induziert.

**Satz 2.17.1.** *Gegeben seien  $(X, x)$  ein hinreichend zusammenhängender topologischer Raum und  $\phi : \pi_1(X, x) \rightarrow G$  ein Homomorphismus. Dann existiert eine natürliche  $G$ -Überlagerung  $p_\phi : (Y_\phi, y) \rightarrow (X, x)$  mit Grundpunkt.*

Wenn  $\phi$  surjektiv ist dann können wir mit Theorem 2.16.3 die Überlagerung  $X_{\ker(\phi)}$  betrachten. Im Allgemeinen jedoch müssen wir auch Überlagerungen betrachten, die nicht wegzusammenhängend sind.

*Beweis.* Wir versehen  $G$  mit der diskreten Topologie und betrachten  $\tilde{X} \times G$  mit der  $\pi_1(X, x)$ -Wirkung  $[w].(z, g) \mapsto ([w].z, g \cdot \phi[w]^{-1})$ . Die Wirkung von  $\pi_1(X, x)$  auf  $\tilde{X}$  haben wir in Korollar 2.15.7 beschrieben.

Dann definieren wir  $Y_\phi := (\tilde{X} \times G)/\pi_1(X, x)$  mit der universellen Überlagerung  $p : \tilde{X} \rightarrow X$ .

Wir schreiben  $[z, g]$  für das Bild eines Punktes  $(z, g) \in \tilde{X} \times G$ . Die Abbildung  $p_\phi : Y_\phi \rightarrow X$  ist  $[z, g] \rightarrow u(z)$ .

$G$  operiert auf  $Y_\phi$  durch  $h, [z, g] \mapsto [z, hg]$ . Diese Operation ist wohldefiniert auf  $Y_\phi$ , da die linke und rechte Gruppenoperation von  $G$  auf  $G$  kommutieren!

Als Grundpunkt von  $Y_\phi$  wählen wir  $y = [\tilde{x}, e]$ .

Wir müssen noch zeigen, dass  $Y_\phi \rightarrow X$  eine Überlagerung ist. Um dies zu sehen, wählen wir eine Teilmenge  $U \subset X$  über der  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  trivial ist.  $X$  wird von diesen Mengen überdeckt. Dann ist  $p^{-1}(U) \cong U \times \pi_1(X, x)$  als  $\pi_1(X, x)$ -Überlagerungen, wobei die Gruppenoperation auf der rechten Seite durch linke Multiplikation auf  $\pi_1(X, x)$  erfolgt. Dann ist

$$p_\phi^{-1}(U) \cong (U \times \pi_1(X, x_0)) \times G/\pi_1(X, x_0) \cong U \times G$$

durch  $(y, [w], g) \mapsto (y, g \cdot \phi[w])$ . Das Inverse ist  $(y, g) \mapsto (y, e, g)$ . Dieser Homöomorphismus ist kompatibel mit der Projektion auf  $U$ . Also ist  $p_\phi$  eine  $G$ -Überlagerung über  $U$ .  $\square$

Diese Konstruktion erlaubt uns eine vollständige Klassifizierung von regulären  $G$ -Überlagerungen mit Grundpunkt.

**Satz 2.17.2.** *Sei  $(X, x)$  hinreichend zusammenhängend. Die Konstruktion  $\phi \mapsto p_\phi$  aus Satz 2.17.1 induziert eine Bijektion:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Äquivalenzklassen von} \\ G\text{-Überlagerungen von } (X, x) \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Homomorphismen} \\ \pi_1(X, x) \rightarrow G \end{array} \right\}$$

Für jede  $G$ -Überlagerung  $(\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow (X, x)$  erinnern wir uns an den Homomorphismus  $\ell : \pi_1(X, x) \rightarrow G$  aus Satz 2.12.7 der durch  $[w] \mapsto \iota^{-1}\tilde{w}_{\tilde{x}}(1)$  definiert ist, wobei  $\iota : G \cong p^{-1}(x) \subset \tilde{X}$  die Faser über  $x$  mit  $G$  identifiziert durch die Zuordnung  $g \mapsto g^{-1}\tilde{x}$ .

Wir beachten noch, dass aufgrund der Eindeutigkeit von Hohebungen für  $g \in G$ ,  $y \in \tilde{X}$  und  $[w] \in \pi_1(X, x)$  immer gilt  $g(\tilde{w}_y) = \tilde{w}_{gy}$ .

*Beweis.* Nach Satz 2.12.7 induziert jede Überlagerung einen Homomorphismus, wir schreiben  $p \mapsto \ell(p)$ . Wir behaupten, dass dies invers zu unserer Konstruktion  $\phi \mapsto p_\phi$  aus Satz 2.17.1 ist.

Wir betrachten zuerst einen Homomorphismus  $\phi : \pi_1(X, x) \rightarrow G$  und müssen zeigen, dass  $\phi = \ell(p_\phi)$

Sei  $[w] \in \pi_1(X, x)$ . Da  $G$  mit der Faser von  $Y_\phi$  über  $x$  identifiziert ist, berechnen wir die Wirkung von  $\phi([w])$  und  $\ell(p_\phi)[w]$  auf  $[\tilde{x}, e] = \iota(e)$ . Es gilt

$$\iota \circ \ell(p_\phi)[w].[\tilde{x}, e] = \tilde{w}'_{[\tilde{x}, e]}(1) = [\tilde{w}_{\tilde{x}}(1), e] = [[w].\tilde{x}, e]$$

Die erste Gleichung ist die Definition von  $\ell(p_\phi)$ . Für die nächste Gleichung beachten wir, dass wir eine Hohebung  $\tilde{w}'$  von  $w$  nach  $Y_\phi$  durch die Hochhebung  $\tilde{w}$  von  $w$  nach  $\tilde{X}$  konstruieren können. Wir schreiben die Anfangspunkte unserer Hochhebungen wieder als Subskripte. Wir benutzen die Eindeutigkeit von Hohebungen. Die letzte Gleichung ist die Definition der Wirkung von  $\pi_1(X, x)$  auf  $\tilde{X}$ . Als nächstes benutzen wir die Äquivalenzrelation auf  $\tilde{X} \times G$ , die  $Y_\phi$  definiert

$$[[w].\tilde{x}, e] = [\tilde{x}, e.\phi([w])^{-1}] = \iota(\phi([w])).$$

Damit gilt  $\ell(p_\phi) = \phi$ .

Sei nun umgekehrt  $p : (Y, y) \rightarrow (X, x)$  eine reguläre  $G$ -Überlagerung und  $\ell(p) : \pi_1(X, x_0) \rightarrow G$  der induzierte Homomorphismus. Wir müssen prüfen, dass  $Y_{\ell(p)}$  äquivalent zu  $Y$  ist.

Wir konstruieren hierzu eine Abbildung  $\tilde{X} \times G \rightarrow Y$ , die alle  $\pi_1(X, x)$ -Bahnen identifiziert. Wir repräsentieren die Elemente von  $\tilde{X}$  als Äquivalenzklassen von Wegen in  $X$  mit Anfangspunkt  $x$ . Dann definieren wir  $f : ([w], g) \mapsto \tilde{w}_{gy}(1)$ , die rechte Seite ist der Endpunkt des Lifts von  $w$  mit Anfangspunkt  $gy \in Y$ . Man prüft, dass  $f$  stetig ist. Das heißt, wir müssen, zeigen, dass der Endpunkt der Hohebung von  $w$  stetig von  $w(1)$  abhängt. (Denn wir haben  $\tilde{X}$  über die Endpunkte der Wege topologisiert und  $G$  ist diskret.) Das folgt genau aus dem Beweis der Stetigkeit der Hohebung  $\tilde{f}$ , vgl. Referenzen in Satz 2.12.10.

Als nächstes prüft man Invarianz auf den  $\pi_1(X, x)$ -Bahnen. Sei also  $[v] \in \pi_1(X, x)$ . Dann ist  $[v].([w], g) = ([w \star v], g\ell[v]^{-1})$ . Hier verwenden wir, dass wir die Wirkung von  $\pi_1(X, x)$  durch Deckbewegungen auf  $\tilde{X}$  explizit als  $[v].[w] = [w \star v]$  berechnen können. (Das folgt mit etwas Sorgfalt direkt aus den Definitionen!)

Unter  $f$  wird  $([w], g)$  nach  $\tilde{w}_{gy}(1)$  geschickt und  $[v].([w], g)$  zum Endpunkt der Hohebung von  $[w \star v]$  mit Anfangspunkt  $(g\ell[v]^{-1}).y$ . Aber  $(g\ell[v]^{-1}).y$  ist gleich  $g\overline{v}_y = \overline{v}_{gy}$ . Hier ist  $\overline{v}_y$  die Umkehrung des Weges  $\tilde{v}_y$ . Also ist

$$f([v].([w], g)) = w \star v \star \overline{v}_{gy} = \tilde{w}_{gy} = f([w], g).$$

Wir erhalten also eine Abbildung  $\bar{f} : Y_{\ell(p)} \rightarrow Y$  über  $X$ , die überdies  $G$ -äquivariant ist. Aber diese Abbildung ist automatisch ein Homöomorphismus nach Lemma 2.17.3.  $\square$

**Lemma 2.17.3.** *Seien  $Y$  und  $Y'$   $G$ -Überlagerungen über einem zusammenhängenden Raum  $X$  und  $f : Y \rightarrow Y'$  eine  $G$ -äquivariante Abbildung. Dann ist  $f$  ein Homöomorphismus über  $X$ .*

*Beweis.* Man sieht leicht, dass  $f$  injektiv ist: Wenn  $f(y_1) = f(y_2)$ , dann liegen  $y_1$  und  $y_2$  in der gleichen Faser. Wenn aber  $f(gy_1) = f(y_1)$  dann ist  $gf(y_1) = f(y_1)$  und da  $G$  frei operiert gilt  $g = e$ .

Wir prüfen Surjektivität. Sei  $y' \in Y'$  gegeben. Wähle irgendein  $y \in p^{-1}(q(y'))$ . Dann gilt  $f(y) \in q^{-1}(y')$ , und damit gibt es  $g \in G$  mit  $gf(y) = y'$ . Also ist  $y' = f(g^{-1}(y))$ .

Es bleibt zu zeigen, dass  $f$  offen ist. Betrachte einen beliebigen Punkt  $z \in X$  und eine Umgebung  $U$  von  $z$ , sodass  $p$  und  $q$  über  $U$  trivial sind. Wähle  $y \in p^{-1}(z)$  und benenne das Blatt von  $p^{-1}(z)$ , das  $y$  enthält mit  $V$ . Betrachte das Blatt  $V'$  in  $q^{-1}(z)$ , das  $f(z)$  enthält. Da  $p$  und  $q$  lokale Homöomorphismen sind induziert  $f$  einen Homöomorphismus  $V \rightarrow V'$ . Das zeigt, dass  $f$  offen ist.  $\square$

Im nächsten Abschnitt brauchen wir ein weiteres Lemma über  $G$ -Überlagerungen.

**Lemma 2.17.4.** *Seien  $f_1, f_2 : Y \rightarrow Y'$  zwei Äquivalenzen von  $G$ -Überlagerungen über einem zusammenhängenden Raum  $X$ . Wenn es ein  $y$  mit  $f_1(y) = f_2(y)$  gibt, dann gilt  $f_1 \equiv f_2$ .*

*Beweis.* Wir können dem Beweis von Lemma 2.11.2 zur Eindeutigkeit von Hochhebungen folgen und schlussfolgern, dass die Teilmenge  $A$  von  $Y$  auf der  $f_1$  und  $f_2$  übereinstimmen offen und abgeschlossen ist. Das reicht nicht für den Beweis, da  $Y$  nicht unbedingt zusammenhängend ist. Allerdings ist das Bild  $p(A) \subset X$  nach Satz 2.9.7 offen und abgeschlossen, also gilt  $p(A) = X$  da  $p(A)$  nach Annahme nicht leer ist. Es ist aber sofort ersichtlich, dass  $A$   $G$ -invariant ist, und daraus folgt  $A = Y$ .  $\square$

## 2.18 Abstieg und Beweis des Satzes von Seifert-van Kampen

Man kann Faserbündel über einer offenen Überdeckung eines topologischen Raumes  $X$  verkleben. Diese Methode heißt **Abstieg**. Sie funktioniert für viele Arten von Bündeln und ihren Verallgemeinerungen. Sie hat zahlreiche Anwendungen, insbesondere in der algebraischen und arithmetischen Geometrie.

Wir beschränken uns hier auf den Fall von  $G$ -Überlagerungen für eine Überdeckung aus zwei offenen Mengen.

**Satz 2.18.1.** *Sei  $(X, x)$  ein topologischer Raum mit offenen Teilmengen  $X_1, X_2$  mit  $X = X_1 \cup X_2$  und seien  $X, X_1, X_2$  und  $X_1 \cap X_2$  alle wegzusammenhängend. Sei  $x \in X_1 \cap X_2$ .*

*Dann gibt es für jedes Paar von  $G$ -Überlagerungen über  $X_1$  und  $X_2$  mit Grundpunkt, deren Einschränkung auf  $X_1 \cap X_2$  äquivalent sind, eine eindeutige  $G$ -Überlagerung mit Grundpunkt über  $X$ .*

*Beweis.* Gegeben sei eine  $G$ -Überlagerung  $p : (Y, y) \rightarrow (X, x)$ . Dann sind  $p_i : Y_i = p^{-1}(U_i) \rightarrow X$  reguläre  $G$ -Überlagerungen und die Einschränkungen von  $p_1$  und  $p_2$  über  $X_1 \cap X_2$  sind gleich. Wir bezeichnen diese Zuordnung mit  $p \mapsto \Psi(p)$ .

Nehmen wir umgekehrt an, dass  $G$ -Überlagerungen  $p_1 : (Y_1, y_1) \rightarrow (X, x)$  und  $p_2 : (Y_2, y_2) \rightarrow (X, x)$  gegeben sind und wir einen  $G$ -äquivalenten Homöomorphismus  $\theta : p_1^{-1}(X_1 \cap X_2) \rightarrow p_2^{-1}(X_1 \cap X_2)$  über  $X_1 \cap X_2$  haben. Nach Lemma 2.17.4 ist  $\theta$  eindeutig, da  $\theta(y_1) = y_2$  fest steht!

Wir definieren  $Y = Y_1 \amalg Y_2 / \sim$  wobei  $z_1 \sim z_2$  wenn  $z_2 = \theta(z_1)$  für  $z_i \in Y_i$ . Insbesondere sind die Grundpunkte äquivalent.

Da  $p_2 \circ \theta = p_1$  definieren die Abbildungen  $p_1$  und  $p_2$  eine Abbildung  $p : Y \rightarrow X$ . Da  $\theta$  mit der  $G$ -Wirkung kompatibel ist, erhalten wir eine  $G$ -Wirkung auf  $Y$  und  $p : Y \rightarrow X$  ist eine  $G$ -Überlagerung. Wir nennen diese Konstruktion  $\Psi(p_1, p_2)$ .

Offensichtlich ist  $\Psi \circ \Phi(p) = p : Y \rightarrow X$ . Umgekehrt induzieren die kanonische Abbildung  $\iota_j : Y_j \rightarrow Y$  für  $j = 1, 2$  zwei  $G$ -äquivalente Homöomorphismen auf die offene Teilmenge  $p^{-1}(X_i)$ . Also ist  $p|_{Y_j}$  isomorph zu  $p_j$  und  $\Phi \circ \Psi(p_1, p_2)$  äquivalent zu  $(p_1, p_2)$ .  $\square$

Wir beweisen nun den Satz von Seifert-van Kampen im speziellen Fall, dass  $X_1$  und  $X_2$  hinreichend zusammenhängend sind.

*Beweis von Theorem 2.5.1 für hinreichend zusammenhängende Räume.* Es ist zu zeigen, dass  $\pi_1(X_1 \cup X_2, x)$  die universelle Eigenschaft des Kolimes hat. Sei  $G$  eine Gruppe. Wir wollen zeigen, dass die Angabe eines Gruppensomorphismus  $\pi_1(X_1 \cup X_2, x) \rightarrow G$  äquivalent zur Angabe von zwei

Gruppenhomomorphismen  $\phi_1 : \pi_1(X_1, x) \rightarrow G$  und  $\phi_2 : \pi_1(X_2, x) \rightarrow G$  ist, die auf dem Bild von  $\pi_1(X_1 \cap X_2, x)$  übereinstimmen.

Nach Satz 2.17.2 ist dies aber äquivalent dazu, zu zeigen, dass eine  $G$ -Überlagerung mit Grundpunkt über  $(X_1 \cup X_2, x)$  äquivalent ist zu zwei  $G$ -Überlagerungen über  $(X_1, x)$  und  $(X_2, x)$ , so dass die beiden Einschränkungen auf  $X_1 \cap X_2$  isomorph sind.

Dies folgt aus Satz 2.18.1.

Wir haben hier benutzt, dass die Einschränkung der  $G$ -Überlagerungen  $p$  auf einen Unterraum  $\iota : U \subset X$  der Verknüpfung von  $\ell(p)$  mit dem Homomorphism  $\iota_*$  entspricht. Das folgt durch Inspektion des Beweises von Satz 2.17.2. Allgemein gilt, dass die Korrespondenz in Satz 2.17.2 natürlich ist.  $\square$



# A Erinnerungen und Ergänzungen

## A.1 Das Zornsche Lemma

Sei  $S$  eine Menge. Wir erinnern an die folgenden Begriffe und Resultate der Mengenlehre:

- (i) Eine **partielle Ordnung** auf  $S$  ist eine Relation  $x \leq y$  mit den folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned}x \leq x & \quad \text{Reflexivität} \\x \leq y \wedge y \leq z & \Rightarrow x \leq z \quad \text{Transitivität} \\x \leq y \wedge y \leq x & \Rightarrow x = y \quad \text{Antisymmetrie.}\end{aligned}$$

- (ii) Eine **Totalordnung** auf  $S$  ist eine partielle Ordnung, für die je zwei Elemente vergleichbar sind:

$$x, y \in S \Rightarrow x \leq y \quad \text{oder} \quad y \leq x.$$

- (iii) Sei  $S$  partiell geordnet,  $T \subset S$  eine Teilmenge.

Ein Element  $b \in S$  heißt eine **obere Schranke** der Teilmenge  $T$ , falls

$$x \leq b \quad \text{für alle} \quad x \in T.$$

- (iv) Sei  $S$  partiell geordnet. Ein Element  $m \in S$  heißt ein **maximales Element**, falls

$$m \leq x \Rightarrow m = x.$$

Das maximale Element muss nicht eindeutig sein. Als Beispiel betrachte die Menge der Ideale des Rings  $\mathbb{Z}$  der ganzen Zahlen mit Teilordnung durch Inklusion. In ihr sind alle Primideale  $(p)$  mit  $p$  Primzahl maximal.

- (v) Eine partiell geordnete Menge  $S$  heißt **induktiv geordnet**, falls jede nicht-leere, total geordnete Teilmenge von  $S$  eine obere Schranke besitzt.

**Lemma A.1.1** (Zornsches Lemma). *Sei  $S$  eine nicht-leere, induktiv geordnete Menge. Dann besitzt  $S$  maximale Elemente.*

## A.2 Das Lebesguesche Lemma

**Lemma A.2.1** (Lebesguesche Eigenschaft). *Ist  $E$  ein kompakter metrischer Raum und  $(U_\lambda)_{\lambda \in I}$  eine offene Überdeckung von  $E$ , so existiert ein  $\rho > 0$ , so dass jede offene Kugel vom Radius  $\rho$  in einer der offenen Mengen  $U_\lambda$  enthalten ist.*

*Beweis.* Jeder Punkt  $x \in E$  liegt in einer offenen Menge  $U_{\lambda(x)}$ . Finde für jeden Punkt  $x \in E$  also eine offene Kugel  $B_{r_x}(x) \subset U_{\lambda(x)}$ . Schon die Kugeln  $B_{r_x/2}(x)$  bilden eine offene Überdeckung von  $E$ . Weil  $E$  kompakt ist, finde endlich viele Punkte  $x_i \in E$ , so dass schon die endlich vielen Kugeln  $B_{r_{x_i}/2}(x_i)$  den Raum  $E$  überdecken. Setze  $\rho$  gleich dem Minimum der endlich vielen  $r_{x_i}/2$ .

Dann leistet dieses  $\rho > 0$  das Gewünschte: sei  $x \in E$  beliebig. Dann liegt  $x$  in einer der Kugeln  $B_{r_{x_i}/2}(x_i)$ . Für jedes  $y \in B_\rho(x)$  gilt wegen  $d(x, y) < \rho$  nach der Dreiecksungleichung

$$d(y, x_i) \leq d(x, y) + d(x, x_i) < \rho + r_{x_i}/2 \leq r_{x_i} ,$$

wobei wir  $\rho \leq r_{x_i}/2$  benutzt haben. Daher ist  $B_\rho(x) \subset B_{r_{x_i}}(x_i)$ . Nach Konstruktion liegt aber  $B_{r_{x_i}}(x_i)$  in einer offenen Menge  $U_\lambda$ .  $\square$

## B Notation

$A \dot{\cup} B$	disjunkte Vereinigung von Mengen oder topologischen Räumen
$A \amalg B$	topologische Summe; Kolimes über ein diskretes Diagramm
*	topologischer Raum mit einem Element; Menge mit einem Element
1	triviale Gruppe; kanonischer Grundpunkt von $S^n$ ; die Zahl 1
$e, e_G$	Einheit der Gruppe $G$
$w \star v$	Verkettung von Wegen durch Hintereinanderdurchlaufung
$\bar{w}$	Umkehrung des Weges $w$ , $\bar{w}(t) = w(1 - t)$
$f \circ g$	Verknüpfung von Funktionen
$\mathbb{Z}_n$	zyklische Gruppe mit $n$ Elementen
$f \simeq g$	die Abbildungen $f$ und $g$ sind homotop
$X \simeq Y$	die topologischen Räume $X$ und $Y$ sind homotopie-äquivalent
$A \cong B$	die topologischen Räume $A$ und $B$ sind homöomorph; die Gruppen $A$ und $B$ sind isomorph; die Mengen $A$ und $B$ sind in Bijektion
$[X, Y]$	Homotopieklassen von Abbildungen $A \rightarrow B$
$[X, A; Y, B]$	Homotopieklassen von Abbildungen $X \rightarrow Y$ relativ zu $A$
$f_*$	von $f : X \rightarrow Y$ induzierte Abbildung zwischen Fundamentalgruppen $f_* : \pi(X, x) \rightarrow \pi(Y, f(x))$ mit $f_*([w]) = [f \circ w]$ ; Abbildung $g \mapsto f \circ g$ zwischen Hom-Mengen oder Homotopieklassen
$\ell$	kanonische Abbildung $\pi(X, x) \rightarrow p^{-1}(x)$ für Überlagerung $p : \tilde{X} \rightarrow X$
$p : \tilde{X} \rightarrow X$	Überlagerung mit Totalraum $\tilde{X}$ und Basis $X$ .
$p : (\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow (X, x)$	Überlagerung $p : \tilde{X} \rightarrow X$ mit $p(\tilde{x}) = x$ .

## C Glossar englischer Begriffe

Wir geben für einige topologische Begriffe die englischen Entsprechungen an.

Deutsch	Englisch
Abschluss	closure
Bahn	orbit
Basis	base
Berührungspunkt	closure point
eigentlich	proper
Faser	fibre
Faserung	fibration
Grundpunkt	base point
Hawaiischer Ohrring	Hawaiian earring
Hochhebungseigenschaft	lifting property

innerer Kern	interior
innerer Punkt	inner point
Kante eines Graphs	edge
Kegel	cone
Koegel	cocone
Kolimes	colimit
Limes	limit
offener Kern	interior
Rand	boundary
Schleifenraum	loop space
Subbasis	subbase
Totalraum	total space
Überlagerung	covering space
Umgebung	neighbourhood
verbundene Summe	connected sum