Blatt 9

Übung 9.1 (2 Punkte)

Schreiben sie das Alphabet in Großbuchstaben.

(a) Klassifizieren Sie alle Buchstaben in Homöomorphieklassen.

(b) Stellen Sie eine Vermutung zur Klassifizierung aller Buchstaben in Homotopieklassen auf.

Übung 9.2 (4 Punkte)

Für jeden topologischen Raum X definieren wir den Kegel über X als $CX = X \times I/_\sim$ wobei $(x, s) \sim (x', s')$ genau wenn $x = x'$ und $s = s'$ oder wenn $s = s' = 1$, x, x' beliebig.
Zeigen Sie, dass CX für jedes X zusammenziehbar ist.

Übung 9.3 (4 Punkte)

Zeigen Sie dass für zwei beliebige topologische Räume (X, x_0) und (Y, y_0) gilt

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0).$$

Übung 9.4 (3 Punkte)

Gegeben sei ein topologischer Raum X. Zeigen Sie, dass es einen Funktor $h_X : \mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$ gibt, definiert durch $Y \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y)$ und $f \mapsto (f_* : g \to f \circ g)$.
Zeigen Sie ebenso, dass es einen Funktor $h^X : \mathbf{hTop}^{op} \to \mathbf{Set}$ gibt, definiert durch $Y \mapsto [Y, X]$ und $f \mapsto f^*$.

Übung 9.5 (1+2+1+2+1 Punkte)

In dieser Übung betrachten wir den Zusammenhang zwischen Homotopiemengen und Fundamentalgruppen.
Wir erinnern daran, dass die Elemente von $\pi_1(X, x_0)$ Klassen von Wegen mit Grundpunkt x_0 sind, modulo Homotopien, die den Grundpunkt x_0 festlassen, $H(0, t) = H(1, t) = x_0$ für alle $t \in I$.

In der Homotopiemenge $[S^1, X]$ dagegen wird kein Grundpunkt festgelegt. Es werden beliebige geschlossene Wege betrachtet, und die Homotopien müssen die Endpunkte nicht festlassen.

Sei X topologischer Raum, $x_0 \in X$ und wir definieren

$$V: \quad \pi_1(X, x_0) \to [S^1, X]$$

als die Abbildung, die den Grundpunkt vergisst.

(a) Zeigen Sie, dass V wohldefiniert ist.

(b) Nehmen Sie an, dass $[f]$ und $[g]$ in $\pi_1(X, x_0)$ konjugiert sind, $[f] = \bar{\alpha} \star g \star \alpha$. Benutzen Sie α, um eine (nicht punktierte) Homotopie von f nach g zu konstruieren, also zu zeigen, dass $V[f] = V[g]$.

(c) * Nehmen Sie nun an, dass $H : S^1 \times I \to X$ eine (nicht punktierte) Homotopie von f nach g ist, also $V(f) = V(g)$. Finden Sie einen geschlossenen Weg α, so dass $f \simeq \bar{\alpha} \star g \star \alpha$ homotop relativ zum Grundpunkt sind.

(d) Sei nun $[v] \in [S^1, X]$ und sei α ein Weg von x_0 nach $v(1)$. (Wir bezeichnen den Grundpunkt von S^1 mit 1.) Zeigen Sie, dass $[v]$ im Bild von V liegt.

(e) Zeigen Sie, dass V bijektiv ist, wenn X wegzusammenhängend und $\pi_1(X, x_0)$ abelsch ist.

Abgabetermin ist die Vorlesung am 17. Dezember.

Die Punktzahl der Aufgaben entspricht nur sehr ungefähr ihrer Schwierigkeit. Insbesondere sind Aufgaben mit Sternchen zum Vergnügen da. Sie sind möglicherweise schwieriger als andere Fragen, aber Ihre Punktzahl wird kaum leiden, wenn Sie die Aufgabe nicht lösen.