Blatt 12

Übung 12.1 (1+1+1+1 Punkte)

(a) Zeigen Sie dass $(m, z) \mapsto 2^m z$ eine Wirkung von $\mathbb{Z}$ auf dem topologischen Raum $\mathbb{C}$ definiert.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ nicht Hausdorff ist.

(c) Zeigen Sie, dass $(m, z) \mapsto 2^m z$ keine Überlagerungswirkung auf $\mathbb{C}$ definiert.

(d) Beschreiben Sie den Raum $(\mathbb{C} \setminus \{0\})/\mathbb{Z}$.

Übung 12.2 (1+2+1 Punkte)

Sei $X = X_{0,0} \cup X_{0,2} \cup X_{2,0} \cup X_{0,-2} \cup X_{-2,0} \subset \mathbb{R}^2$, wobei $X_{a,b}$ ein Kreis mit Radius 1 und Mittelpunkt (a, b) ist.

(a) Was ist die Fundamentalgrupp von X?

(b) Definieren Sie eine Überlagerungswirkung von $\mathbb{Z}_4$ auf X und beschreiben Sie den Quotienten $X/\mathbb{Z}_4$.

(c) * Finden Sie einen topologischen Raum Y mit einer Überlagerungswirkung von $\mathbb{Z}_3$, so dass $Y/\mathbb{Z}_3$ ein Torus ist.

Übung 12.3 (1+2+1 Punkte)

(a) Definieren Sie eine Überlagerungswirkung von $\mathbb{Z}^2$ auf $\mathbb{R}^2$ durch $(a, b).(x, y) = (x + a, y + b)$. Beschreiben Sie den Quotienten.

(b) Wir betrachten eine Gruppe G mit zwei Erzeugern a und b, die wie folgt auf $\mathbb{R}^2$ operiert:

$$a.(x, y) = (x + 1, y) \quad \text{und} \quad b.(x, y) = (-x, y + 1)$$

Beschreiben Sie $\mathbb{R}^2/G$. Betrachten Sie hierzu zuerst das Bild von $[0, 1] \times [0, 1]$ in $\mathbb{R}^2/G$.

(c) * Geben Sie eine Präsentierung von G aus Aufgabenteil (b).

Übung 12.4 (3+2+1+2 Punkte)

Eine topologische Gruppe ist ein topologischer Raum $(G, \mathcal{T}_G)$ mit stetigen Abbildungen $\mu \colon G \times G \to G$ und $(-)^{-1} \colon G \to G$, sowie einem ausgezeichneten Element $e \in G$ so, dass $(G, \mu, (-)^{-1}, e)$ eine Gruppe ist.

In dieser Aufgabe zeigen wir, dass die Fundametnalgruppe $\pi(G, e)$ einer topologischen Gruppe G stets abelsch ist.

(a) Zeigen Sie, dass die Gruppenstruktur von G eine Gruppenstruktur auf $\pi_1(G, e)$ definiert, wobei das Produkt $[w].[v]$ als die Homotopieklasse des Weges $t \mapsto w(t).v(t)$ ist.

(b) Es sei X eine Menge mit zwei (nicht unbedingt assoziativen) unitalen Monoid-Strukturen $(X, \cdot, 1.)$ und $(X, *, 1_*)$. In anderen Worten, X hat zwei Produkte $\cdot$ und $*$ mit Einheiten $1.$ und 1_*. Nehmen wir außerdem an, dass gilt

$$(x_0 \cdot x_1) * (y_0 \cdot y_1) = (x_0 * y_0) \cdot (x_1 * y_1) \quad \forall\, x_0, x_1, y_0, y_1 \in X\,.$$

Zeigen Sie, dass dann die beiden Monoid-Strukturen identisch sind. (Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass die Einheiten gleich sind.)

(c) Zeigen Sie, dass $\cdot$ und $*$ außerdem kommutativ sind.

(d) Zeigen Sie, dass die Fundamentalgrupp einer topologischen Gruppe stets abelsch ist.

Abgabetermin ist die Vorlesung am 21. Januar 2020.

Die Punktzahl der Aufgaben entspricht nur sehr ungefähr ihrer Schwierigkeit. Insbesondere sind Aufgaben mit Sternchen zum Vergnügen da. Sie sind möglicherweise schwieriger als andere Fragen, aber Ihre Punktzahl wird kaum leiden, wenn Sie die Aufgabe nicht lösen.