

Blatt 6

Übung 6.1 (4 Punkte)

Welche dieser Matrizen sind diagonalisierbar?

1. $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -1 \\ -2 & 7 & -4 & -1 \end{pmatrix} \in M(4 \times 4, \mathbb{R})$

2. $B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{F}_7)$

Übung 6.2 (3 Punkte)

Bestimmen Sie alle Ähnlichkeitsklassen von Matrizen in $M(2 \times 2, \mathbb{C})$, d.h. geben Sie eine Menge C von Matrizen an, so dass jede Matrix $A \in M(2 \times 2, \mathbb{C})$ zu genau einer Matrix in C ähnlich ist.

Übung 6.3 (4 Punkte)

Finden Sie alle diagonalisierbaren Matrizen, die mit $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ kommutieren.

Welche diagonalisierbaren Matrizen kommutieren sowohl mit A als auch mit $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$?

Übung 6.4 (3 Punkte)

Sei $f \in \text{End}_K(V)$ und sei W ein f -invarianter Untervektorraum von V . Dann heißt ein f -invarianter Untervektorraum $U \leq V$ mit $V = U \oplus W$ ein f -invariantes Komplement von W .

1. Sei W ein f -invariantes Komplement von U in V . Zeigen Sie, dass $p_f = p_{f|_U} \cdot p_{f|_W}$.
2. Sei λ ein Eigenwert von f mit $\mu_{geo}(f, \lambda) < \mu_{alg}(f, \lambda)$. Zeige, dass $\text{Eig}(f, \lambda)$ kein f -invariantes Komplement besitzt.

Übung 6.5 (5 Punkte)

Finden Sie eine obere Dreiecksmatrix, die ähnlich zu

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -\frac{3}{2} & 2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

ist.

Übung 6.6 (1 Punkt)

* Sei V ein Vektorraum über K und $g : V \rightarrow V$ mit $g^n = \text{id}_V$ für $n \in \mathbb{N}$, wobei n die kleinste positive ganze Zahl mit dieser Eigenschaft ist. Sei W ein g -invarianter Untervektorraum von V .

Zeigen Sie, dass W ein g -invariantes Komplement hat, wenn $K = \mathbb{C}$.

Für welche anderen Körper K gilt dieses Resultat?

Abgabetermin ist die Vorlesung am 13.5.24.

Begründen Sie all Ihre Antworten!

Geben Sie bitte zu zweit ab und achten darauf, dass jede*r ungefähr die Hälfte der Aufgaben aufschreibt, also mindestens 8 Punkte.

Die Punktzahl der Aufgaben entspricht nur ungefähr ihrer Schwierigkeit. Insbesondere sind Aufgaben mit Sternchen zum Vergnügen da. Sie sind möglicherweise schwieriger als andere Fragen, aber Ihre Punktzahl wird kaum leiden, wenn Sie die Aufgabe nicht lösen.