Blatt 12 Inneres Produkt und Adjungierte

Übung 12.1 (2 Punkte)

Beweisen Sie die folgende Polarisationsformel für hermitesche Sesquilinearformen:

$$h(u,v) = \frac{1}{4}(h(u+v,u+v) - h(u-v,u-v) + ih(u+iv,u+iv) - ih(u-iv,u-iv))$$

Übung 12.2 (2 Punkte)

Ist das Produkt von zwei symmetrischen Matrizen symmetrisch? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an!

Übung 12.3 (2 Punkte)

Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit innerem Produkt und $W \leq V$. Zeigen Sie, dass gilt $(W^{\perp})^{\perp} = W$.

Übung 12.4 (3 Punkte)

1. $(V, \langle , \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,V)$. Angenommen für alle $v \in V$ gilt $\langle f(v), v\rangle = 0$. Muss gelten $f = 0$?
2. Sei nun $(W, \langle , \rangle)$ ein unitärer Vektorraum und $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W,W)$. Angenommen für alle $w \in W$ gilt $\langle g(w), w\rangle = 0$. Muss gelten $g = 0$?

Übung 12.5 (2 Punkte)

Zeigen Sie, dass

$$\left(\begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-i}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{-1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{i\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{i}{2\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right)$$

eine Orthonormalbasis für das innere Produkt $\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^{3} v_i \overline{w_i}$ auf $\mathbb{C}^3$ ist.

Übung 12.6 (5 Punkte)

Der vier-dimensionale reelle Vektorraum

$$V = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid \mathrm{grad}\, f \leq 3\}$$

hat als eine Basis $v_1 = 1$, $v_2 = x$, $v_3 = x^2$ und $v_4 = x^3$. Wir betrachten das innere Produkt:

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

Wenden Sie das Gram-Schmidt'sche Orthogonalisierungsverfahren auf v_1, v_2, v_3 und v_4 an (in dieser Reihenfolge), um eine Orthonormalbasis zu bestimmen

Übung 12.7 (3 Punkte)

Bestimmen Sie die Adjungierte lineare Abbildung in den folgenden Fällen:

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist die Rotation um den Ursprung um θ.
2. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^n$ ist die Abbildung die 1 auf den festen Vektor v schickt.
3. $a : \mathbb{C}^{2n} \to \mathbb{C}^n$ ist die Summenabbildung $(v, w) \mapsto v + w$, wobei wir einen Vektor in $\mathbb{C}^{2n}$ als Paar von Vektoren in $\mathbb{C}^n$ schreiben.

Übung 12.8 (1 Punkt)

* Zeigen Sie, dass sich jede Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ faktorisieren lässt als $A = TB$, wobei T eine obere Dreiecksmatrix ist und B eine orthogonale Matrix (d.h. $BB^T = E_n$).

Abgabetermin ist die Vorlesung am 1.7.24.

Begründen Sie all Ihre Antworten!

Geben Sie bitte zu zweit ab und achten darauf, dass jede*r ungefähr die Hälfte der Aufgaben aufschreibt, also mindestens 8 Punkte.

Die Punktzahl der Aufgaben entspricht nur ungefähr ihrer Schwierigkeit. Insbesondere sind Aufgaben mit Sternchen zum Vergnügen da. Sie sind möglicherweise schwieriger als andere Fragen, aber Ihre Punktzahl wird kaum leiden, wenn Sie die Aufgabe nicht lösen.