Blatt 9

Übung 9.1 (3 Punkte)

Zeigen Sie:

1. Jede Untermenge einer (möglicherweise unendlichen) linear unabhängigen Menge von Vektoren ist linear unabhängig.

2. Enthält eine (möglicherweise unendliche) Menge von Vektoren eines Vektorraums eine linear abhängige Untermenge, so ist sie linear abhängig.

3. Jede linear unabhängige Menge in einem endlich erzeugten Vektorraum V lässt sich zu einer Basis ergänzen.

Übung 9.2 (7 Punkte)

Hier bezeichnet e_i immer den Vektor mit Koordinaten $(e_i)_i = 1$ und $(e_i)_j = 0$ wenn $j \neq i$.

1. Ist $\{e_1, e_1 + 10^{42}e_2\}$ eine Basis für $\mathbb{R}^2$?

2. Sei $V = \mathbb{F}_3^4$. Ist $\{0, e_1, e_2, e_3, e_4\}$ eine Basis?

3. Ist $\{e_1 + ie_2, ie_1 + ie_2 + ie_3, (i-1)e_2 - e_3\}$ eine Basis für $\mathbb{C}^3$?

4. Sei V der Vektorraum der reellwertigen Folgen. Sei f_i die Folge, die 1 an i-ter Stelle ist und sonst 0. Ist $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ eine Basis für V?

5. Sei f_i der Vektor in $\mathbb{R}^n$ dessen i-te Koordinate 0 ist während alle anderen Koordinaten 1 sind. Also $f_i = \sum_{j\neq i} e_j$. Ist $\{f_1, \ldots, f_n\}$ eine Basis für $\mathbb{R}^n$?

6. Ist $\mathcal{B}_n = \{e_1 + e_2, e_2 + e_3, \ldots, e_{n-1} + e_n, e_n + e_1\}$ eine Basis für $\mathbb{R}^n$?

Übung 9.3 (4 Punkte)

1. Sei V ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum. Angenommen für $(v_1, \ldots, v_n)$ in V gilt: Wenn $a_1v_1 + \cdots + a_nv_n = 0$ für $a_i \in \mathbb{Z}$ (!), dann sind alle $a_i = 0$. Zeigen Sie, dass $(v_1, \ldots, v_n)$ linear unabhängig ist.

2. Seien $\{p_1, \ldots, p_n\}$ Primzahlen und nehmen Sie an, dass $a_1 \log(p_1) + \cdots + a_n \log(p_n) = 0$, wobei log den natürlichen Logarithmus bezeichnet. Zeigen Sie, dass alle $a_i = 0$ sind.

3. Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum nicht endlich erzeugt ist.

Hinweis: Sie können in dieser Aufgabe die folgenden Fakten annehmen:

- Es gelten die üblichen Rechenregeln für den Logarithmus.
- Jede ganze Zahl hat eine eindeutige Zerlegung in Primfaktoren.
- Für eine Primzahl p ist $\log(p)$ niemals rational.

Übung 9.4 (5 Punkte)

In dieser Aufgabe beweisen wir den folgenden Satz: Sei V ein K-Vektorraum und seien $U, U' \leq V$ Untervektorräume mit $\dim_K(U) = \dim_K(U')$. Dann gibt es $W \leq V$ mit $V = U \oplus W$ und $V = U' \oplus W$ (innere direkte Summe).

1. Sei $V = \mathbb{R}^2$ und seien $U = \operatorname{span}_K(e_1)$ und $U' = \operatorname{span}_K(e_2)$. Finden Sie zwei verschiedene W mit $V = U \oplus W$ und $V = U' \oplus W$.
2. Sei nun V ein K-Vektorraum und seien $U, U' \leq V$ Untervektorräume mit $\dim_K(U) = \dim_K(U')$ so dass $V = U \oplus U'$. Wählen Sie Basen $(u_1, \ldots, u_k)$ für U und $(u'_1, \ldots, u'_k)$ für U'. Zeigen Sie, dass für $W = \operatorname{span}_K(u_1 + u'_1, \ldots, u_k + u'_k)$ gilt: $U \cap W = \{0\}$, $U' \cap W = \{0\}$ und $U + W = U' + W = V$.
3. Nehmen Sie nun an, dass $U, U' \leq V$ mit $\dim_K(U) = \dim_K(U')$ und $U \cap U' = \{0\}$, aber $U + U' \neq V$. Finden Sie W mit $V = U \oplus W = U' \oplus W$.
4. Zeigen Sie nun das allgemeine Resultat: Wenn $U, U' \leq V$ mit $\dim_K(U) = \dim_K(U')$, dann gibt es $W \leq V$ mit $V = U \oplus W$ und $V = U' \oplus W$.

Übung 9.5 (1 Punkt)

* Sei K ein endlicher Körper. Zeigen Sie, dass es eine Primzahl p und eine natürliche Zahl n gibt, sodass K genau p^n Elemente hat.

Abgabetermin ist die Vorlesung am 18.12.2023.

Begründen Sie all Ihre Antworten!

Geben Sie bitte zu zweit ab und achten darauf, dass jede*r ungefähr die Hälfte der Aufgaben aufschreibt, also mindestens 8 Punkte.

Die Punktzahl der Aufgaben entspricht nur ungefähr ihrer Schwierigkeit. Insbesondere sind Aufgaben mit Sternchen zum Vergnügen da. Sie sind möglicherweise schwieriger als andere Fragen, aber Ihre Punktzahl wird kaum leiden, wenn Sie die Aufgabe nicht lösen.