Blatt 8

Übung 8.1 (5 Punkte)

1. Finden Sie in $\mathbb{R}^3$ drei nichttriviale Untervektorräume, V_1, V_2, V_3 mit $\mathbb{R}^3 = V_1+V_2+V_3$ und $V_i \cap V_j = \{0\}$ für alle i, j.
2. Finden Sie in $\mathbb{R}^2$ drei nichttriviale Untervektorräume, W_1, W_2, W_3 mit $\mathbb{R}^2 = W_1 + W_2 + W_3$ und $W_i \cap W_j = \{0\}$ für alle i, j.
3. Finden Sie in $\mathbb{R}^3$ drei Untervektorräume, U_1, U_2, U_3 mit $\mathbb{R}^3 = U_1 + U_2 + U_3$ und $U_i \cap U_j \neq \{0\}$ für alle i, j aber $U_1 \cap U_2 \cap U_3 = \{0\}$.
4. Finden Sie einen Isomorphismus Zwischen $\mathbb{R}^3$ und $V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$ für die Untervektorräume, die Sie in Teilaufgabe 1 gefunden haben.
5. Zeigen Sie, dass in Beispiel 2. kein Isomorphismus $\mathbb{R}^2 \cong W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$ existiert.

Übung 8.2 (7 Punkte)

1. Seien U und V K-Vektorräume und $\alpha, \beta : U \to V$ lineare Abbildungen. Zeigen Sie, dass $\alpha + \beta$ linear ist. Geben Sie Gegenbeispiele für die folgenden Aussagen:

   (a) $\mathrm{Im}(\alpha + \beta) = \mathrm{Im}(\alpha) + \mathrm{Im}(\beta)$;

   (b) $\ker(\alpha + \beta) = \ker(\alpha) \cap \ker(\beta)$.

   Zeigen Sie, dass die beiden Aussagen durch korrekte Inklusionen ersetzt werden können.

2. Geben Sie ein Beispiel für eine K-lineare Abbildung $\alpha : V \to V$ (nicht id_V oder 0), die $\alpha^2 = \alpha$ erfüllt.

   Sei nun V ein beliebiger Vektorraum und $\alpha : V \to V$ eine beliebige K-lineare Abbildung mit $\alpha^2 = \alpha$. Zeigen Sie, dass $V = \ker(\alpha) \oplus \mathrm{Im}\,(\alpha)$ (da wir Untervektorräume von V betrachten ist hier die innere direkte Summe gemeint).

Übung 8.3 (4 Punkte)

Sei $U = \mathbb{R}^2$, $V = \mathbb{R}^3$ und $f : U \to V$ die lineare Abbildung, die $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ nach $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ nach $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ schickt.

1. Finden Sie $\ker(f)$.
2. Bestimmen Sie $\operatorname{Im}(f)$.
3. Geben Sie einen expliziten Isomorphismus $V/\operatorname{Im}(f) \cong \mathbb{R}^2$ an.
4. Geben Sie einen Isomorphismus $\ker(f) \oplus \operatorname{Im}(f) \cong U$ an (dies ist die äußere direkte Summe).

Übung 8.4 (4 Punkte)

Gegeben sei ein Vektorraum W mit Untervektorräumen $U \leq V \leq W$.

1. Konstruieren Sie eine injektive lineare Abbildung $j : V/U \to W/U$.
2. Konstruieren Sie eine surjektive lineare Abbildung $q : W/U \to W/V$.
3. Zeigen Sie, dass $V/U = \ker(q)$ ist.
4. Zeigen Sie, dass $W/V = (W/U)/(V/U)$ ist.

Abgabetermin ist die Vorlesung am 11.12.2023.

Begründen Sie all Ihre Antworten!

Geben Sie bitte zu zweit ab und achten darauf, dass jede*r ungefähr die Hälfte der Aufgaben aufschreibt, also mindestens 8 Punkte.

Die Punktzahl der Aufgaben entspricht nur ungefähr ihrer Schwierigkeit. Insbesondere sind Aufgaben mit Sternchen zum Vergnügen da. Sie sind möglicherweise schwieriger als andere Fragen, aber Ihre Punktzahl wird kaum leiden, wenn Sie die Aufgabe nicht lösen.