Blatt 6

Übung 6.1 (4 Punkte)

Sei $(H, \cdot)$ eine beliebige endliche Gruppe der Ordnung n. Wir wollen zeigen, dass $(H, \cdot)$ isomorph zu einer Untergruppe von S_n ist.

Wir definieren eine Abbildung $\ell : H \to Sym(H)$ durch $\ell(h) : g \mapsto hg$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen

1. Die Abbildung ℓ ist wohldefiniert, dass heißt $\ell(h)$ ist tatsächlich für jedes h eine Bijektion von H nach H.
2. Die Abbildung ℓ ist ein Gruppenhomomorphismus.
3. Die Abbildung ℓ ist injektiv.
4. H ist isomorph zu einer Untergruppe von S_n.

Übung 6.2 (5 Punkte)

Konstruieren Sie einen Körper K mit 4 Elementen, $\{0, 1, a, b\}$. Geben Sie zwei Tafeln an, in denen alle additiven und multiplikativen Verknüpfungen in K aufgelistet werden.

Hinweis. Es gibt bis auf Isomorphismus nur einen einzigen Körper mit 4 Elementen. Zeigen Sie zuerst, dass $x + x = 0$ für alle Elemente x von K gelten muss. Als nächstes können Sie zeigen, dass $a + 1 = b$ und $a^2 = b$ gilt und dann die Tafeln vervollständigen.

Übung 6.3 (6 Punkte)

1. Zeigen Sie, dass für eine komplexe Zahl z für den Realteil $\operatorname{Re} z = \frac{z+\bar{z}}{2}$ gilt und geben Sie eine ähnliche Formel für den Imaginärteil von z an.
2. Schreiben Sie $(1 + i)^2$ und $\frac{1+i}{1-i}$ in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Wir erweitern nun die komplexe Zahlenebenen um einen “Punkt in der Unendlichkeit” ∞. Wir definieren eine Abbildung $f : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

$$f : z \mapsto \begin{cases} \frac{z+i}{z-i} & \text{für } z \neq i, \infty \\ \infty & \text{für } z = i \\ 1 & \text{für } z = \infty \end{cases}$$

3. Bestimmen Sie $f(-i)$, $f(0)$, $f(1)$ und $f(-1)$.

4. Zeigen Sie, dass
$$g : z \mapsto \begin{cases} i\frac{z+1}{z-1} & \text{für } z \neq 1, \infty \\ \infty & \text{für } z = 1 \\ i & \text{für } z = \infty \end{cases}$$
eine Umkehrfuktion für f ist.

5. Bestimmen $f(C)$ wenn $C = \{z \mid |z| = 1\}$ der Einheitskreis ist.

Übung 6.4 (5 Punkte)

Wir betrachten die Körper $\mathbb{F}_p$, wobei p eine Primzahl ist. Wir schreiben der Einfachheit halber a statt $\overline{a}$ für die Elemente von $\mathbb{F}_p$.

1. Was ist die Ordnung des Elements 2 in $(\mathbb{F}_{11} \setminus \{0\}, \cdot)$?

2. Gibt es $x \in \mathbb{F}_{13}$ mit $x^2 = -1$? Gibt es $x \in \mathbb{F}_{11}$ mit $x^2 = -1$?

3. Zeigen Sie, dass für jedes $x \in \mathbb{F}_{11}$ gilt $x^{11} = x$.

4. Zeigen Sie, das für jede Primzahl und jedes $x \in \mathbb{F}_p \setminus \{0\}$ gilt, dass $x^{p-1} = 1$ in $\mathbb{F}_p$.

5. * Zeigen Sie, dass die Gleichung $x^2 = -1$ in $\mathbb{F}_p$ genau dann lösbar ist, wenn $p = 1 \mod 4$ ist, also $p = 4k + 1$ für irgendein $k \in \mathbb{Z}$.

Abgabetermin ist die Vorlesung am 27.11.2023.

Begründen Sie all Ihre Antworten!

Geben Sie bitte zu zweit ab und achten darauf, dass jede*r ungefähr die Hälfte der Aufgaben aufschreibt, also mindestens 8 Punkte.

Die Punktzahl der Aufgaben entspricht nur ungefähr ihrer Schwierigkeit. Insbesondere sind Aufgaben mit Sternchen zum Vergnügen da. Sie sind möglicherweise schwieriger als andere Fragen, aber Ihre Punktzahl wird kaum leiden, wenn Sie die Aufgabe nicht lösen.