Blatt 13

Übung 13.1 (4 Punkte)

Betrachten Sie für jedes $t \in \mathbb{R}$ die folgende Matrix:

$$M_t = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -5 & 5 & 6 \\ 4 & t-6 & 0 \\ -3 & 7-2t & 8 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in M(5 \times 3, \mathbb{R}).$$

Bestimmen Sie den Rang von M_t für jeden Wert von t.

Übung 13.2 (4 Punkte)

1. Zeigen Sie, dass die Vektoren $(b_1, \dots, b_n)$ genau dann eine Basis von K^n bilden, wenn der Rang der Matrix mit Spalten b_i gleich n ist.
2. Prüfen Sie, ob $\left(\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ eine Basis von $\mathbb{R}^4$ ist.

Übung 13.3 (5 Punkte)

Seien $u, v, w \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass für das Vektorprodukt $\times$ und das Skalarprodukt . die folgenden Gleichungen gelten.

1. $u \times (v \times w) = (u.w)v - (u.v)w$
2. $(v \times w).(v \times w) = (v.v)(w.w) - (v.w)(v.w)$
3. $||u \times v|| = ||u|| \cdot ||v|| \sin(\alpha)$, wobei $\alpha \in [0, \pi]$ die reelle Zahl ist, die $\cos(\alpha) = \frac{u \cdot v}{||u|| \cdot ||v||}$ erfüllt.

Übung 13.4 (6 Punkte)

1. Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Untervektorraum $V = \{A \mid A = -A^T\} \subset M(3 \times 3, \mathbb{R})$. Finden Sie eine Basis $(x_1, \dots, x_n)$ für V und bestimmen Sie die Dimension n.

2. Für zwei Matrizen $A, B \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$ definieren wir $[A, B] = A \cdot B - B \cdot A$. Zeigen Sie, dass für $A, B \in V$ auch $[A, B] \in V$ gilt.

3. Berechnen Sie $[x_i, x_j]$ für Ihre Basisvektoren. (Sie können Ihre Basis aus 1. noch einmal abändern, um Ihre Rechnungen zu vereinfachen.) Zeigen Sie zuerst, dass Sie nicht n^2 Rechnungen ausführen müssen, sondern nur $\frac{n(n-1)}{2}$.

4. Finden Sie eine Vektorrauminjektion $f : \mathbb{R}^3 \to V$, sodass $f(x \times y) = [f(x), f(y)]$ gilt.

Übung 13.5 (1 Punkt)

* In dieser Aufgabe leiten wir das Zornsche Lemma aus dem Auswahlaxiom her. Sei also ein nichtleere, partiell geordnete Menge X gegeben, in der jede Kette eine obere Schranke hat. Wir müssen zeigen, dass X ein maximales Element hat. Für jeede Kette y betrachten wir die Menge $\hat{y}$ von oberen Schranken, die nicht selbst Element von y sind. Mit dem Auswahlaxiom suchen wir für jede nichtleere Menge der Form $\hat{y}$ ein Element $f(\hat{y}) \in X$ aus. Insbesondere ist $f(\hat{y})$ eine obere Schranke für y. Wir nennen eine Kette y eine f-Kette, wenn $y \neq \emptyset$ und für jede Teilmenge $z \subset y$ mit $\hat{z} \cap y \neq \emptyset$ gilt, dass $f(\hat{z})$ minimal in $\hat{z} \cap y$ ist.

- Zeigen Sie, dass eine f-Kette existiert.
- Zeigen Sie, dass für jede f-Kette y gilt: Wenn $z \subset y$ und $\hat{z} \cap y = \emptyset$, dann ist $\hat{z} = \hat{y}$.
- Zeigen Sie, dass für jede nichtleere f-Kette gilt, dass $y' = y \cup f(\hat{y})$ auch eine f-Kette ist.
- Zeigen Sie, dass für zwei f-Ketten y, z eine ein *Anfangssegment* der anderen ist. Es heißt y Anfangssegment von z wenn $y \subset z$ und jedes Element in z das kleiner gleich einem Element von y ist, ist auch in y.
- Zeigen Sie, dass die Vereinigung w der Menge aller f-Ketten in X total geordnet und selbst eine f-Kette ist.
- Leiten Sie das Zornsche Lemma her, indem Sie zeigen, dass w ein maximales Element hat, dass auch maximales Element von X ist.

Abgabetermin ist die Vorlesung am 29.1.2024.

Begründen Sie all Ihre Antworten!

Geben Sie bitte zu zweit ab und achten darauf, dass jede*r ungefähr die Hälfte der Aufgaben aufschreibt, also mindestens 8 Punkte.

Die Punktzahl der Aufgaben entspricht nur ungefähr ihrer Schwierigkeit. Insbesondere sind Aufgaben mit Sternchen zum Vergnügen da. Sie sind möglicherweise schwieriger als andere Fragen, aber Ihre Punktzahl wird kaum leiden, wenn Sie die Aufgabe nicht lösen.