Blatt 10

Übung 10.1 (5 Punkte)

1. Was ist die Dimension von $\mathbb{C}^n$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum?
2. Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $U \leq V$. Bestimmen Sie die Dimension von V/U.
3. Zeigen Sie, dass es keine Surjektion, von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^3$ gibt.
4. Seien f und g K-linear. Zeigen Sie, dass $\operatorname{rg}(g \circ f) \leq \operatorname{rg}(g)$ und $\operatorname{rg}(g \circ f) \leq \operatorname{rg}(f)$.

Übung 10.2 (3 Punkte)

Sei V ein endlich erzeugter K–Vektorraum mit $n = \dim_K(V)$ und sei $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$. Zeigen Sie direkt mit den Ergebnissen aus Abschnitt 4.2 (ohne Korollar 4.3.5 zu verwenden), dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind.

1. $\mathcal{B}$ ist eine Basis.
2. $\mathcal{B}$ ist linear unabhängig.
3. $\mathcal{B}$ ist ein Erzeugendensystem.

Übung 10.3 (5 Punkte)

Berechnen Sie (für $a, b, c, d, a', b', c' \in \mathbb{R}$):

1. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a' & b' \\ 0 & 1 & c' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. Finden Sie eine Matrix M mit $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Übung 10.4 (6 Punkte)

Die Matrix

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

ist darstellende Matrix für die Rotation r um den Winkel θ um die Achse $\mathbb{R}e_1$ in $\mathbb{R}^3$.

1. Beschreiben Sie die Umkehrabbildung von r und geben Sie eine Matrix R^{-1} an, so dass $R \cdot R^{-1} = E_3$
2. Geben Sie eine geometrische Beschreibung der linearen Abbildung mit darstellender Matrix
$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
3. Berechnen Sie SRS^{-1}.
4. Geben Sie eine geometrische Beschreibung der linearen Abbildung, die SRS^{-1} darstellt.

Übung 10.5 (1 Punkt)

* Betrachten Sie die Menge H_n aller $n \times n$-Matrizen, die in jeder Zeile und in jeder Spalte genau einen Eintrag gleich 1 und sonst alle Einträge gleich 0 haben.

Zeigen Sie, dass H_n mit der Matrixmultiplikation eine Gruppe bildet, die isomorph zu einer Gruppe ist, die wir bereits kennen.

Abgabetermin ist die Vorlesung am 8.1.2024.

Begründen Sie all Ihre Antworten!

Geben Sie bitte zu zweit ab und achten darauf, dass jede*r ungefähr die Hälfte der Aufgaben aufschreibt, also mindestens 8 Punkte.

Die Punktzahl der Aufgaben entspricht nur ungefähr ihrer Schwierigkeit. Insbesondere sind Aufgaben mit Sternchen zum Vergnügen da. Sie sind möglicherweise schwieriger als andere Fragen, aber Ihre Punktzahl wird kaum leiden, wenn Sie die Aufgabe nicht lösen.