

Arbeit und Potential

Im \mathbb{R}^3 sei ein Kraftfeld vorgegeben:

$$\mathbf{k}(\mathbf{x}) = (k_1(\mathbf{x}), k_2(\mathbf{x}), k_3(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$$

(Beispiele: Gravitationskraft; Kraft, die durch ein elektrisches Feld auf eine Ladung ausgeübt wird).

Wird ein Körper gegen diese Kraft, der er ausgesetzt ist, um ein geradliniges Wegstück \mathbf{s} verschoben, so wird eine Arbeit A geleistet, welche durch das Produkt $A = |\mathbf{k}| \cdot |\mathbf{s}|$ gegeben wird, falls die Kraft \mathbf{k} und der Weg \mathbf{s} gleichgerichtet sind. Ist das nicht der Fall, kommt für die Arbeit nur der Teil der Kraft in Betracht, der in Wegrichtung wirkt: $A = \mathbf{k} \cdot \mathbf{s}$ (Skalares Produkt). Ist die Kraft wegababhängig und der Weg nicht geradlinig, erhält man die Arbeit, welche geleistet werden muß, um den Körper längs eines Weges

$$\mathbf{s} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{s} = \mathbf{s}(t), \quad t \in [a, b] \subset \mathbb{R}, \quad \mathbf{s}(a) = \mathbf{x}, \quad \mathbf{s}(b) = \mathbf{y}, \quad \mathbf{s} \in C^1([a, b])$$

vom Punkt \mathbf{x} zum Punkt \mathbf{y} zu bringen durch

$$(3.4) \quad A = \int_{\mathbf{x}}^{\mathbf{y}} \mathbf{k} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{k}(\mathbf{s}(t)) \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{s}(t) dt.$$

Wenn ein Kraftfeld so beschaffen ist, daß es gleichgültig ist, auf welchem Weg der Körper von \mathbf{x} nach \mathbf{y} gebracht wird, heißt das Kraftfeld konservativ (d.h. die Arbeitsenergie bewahrend). Mathematisch bedeutet dies, daß das Integral (3.4) vom speziellen Weg unabhängig ist. Physikalisch findet dies seine Auswirkung darin, daß man jedem Ort eine Zahl zuordnen kann, ein Potential. Das ist eine skalare Ortsfunktion $U(\mathbf{x})$, die beschreibt, welche Arbeit geleistet werden muß, um einen Einheitskörper von einem Bezugspunkt an den festgelegten Ort zu bringen.

Die Arbeit $\mathbf{k} \cdot d\mathbf{s}$ einer kleinen Verschiebung $d\mathbf{s}$ entspricht der Potentialdifferenz

$$dU = (\text{grad } U) \cdot d\mathbf{s} = \mathbf{k} \cdot d\mathbf{s}.$$

Dies legt den Verdacht nahe, daß

- 1) ein konservatives Kraftfeld sich als Gradient eines Skalarfeldes (Potential) darstellen läßt und
- 2) dann das Wegintegral der Kraft vom speziellen Weg unabhängig ist.

Beides ist richtig, denn es gilt:

Definition 3.3

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, \mathbb{V}^n der Raum der n -dimensionalen Vektoren, und $\mathbf{v} : D \rightarrow \mathbb{V}^n$ ein Vektorfeld.

Existiert dann eine Funktion $\varphi \in C^1(D)$ mit

$$(3.5) \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \text{grad } \varphi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in D,$$

so heißt φ ein *Potential* von \mathbf{v} .

Satz 3.4

Ist $\mathbf{v} : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{V}^n$, D offen und konvex, $\mathbf{v} \in C^1(D, \mathbb{V}^n)$, so sind folgende Aussagen äquivalent:

- (1) \mathbf{v} besitzt ein Potential.
- (2) Das Kurvenintegral bzgl. \mathbf{v} ist wegunabhängig.

Die Rotation und der Satz von Stokes

Die Entscheidung, ob das Linienintegral bzgl. eines Kraftfelds φ wegunabhängig ist, ist gleichwertig mit dem Auffinden einer Stammfunktion gemäß (3.5). Es stellt sich die Frage, ob man nicht direkt am Kraftfeld ablesen kann, ob das Integral wegunabhängig ist, d.h. wann ist $\int_k \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = 0$ für jeden geschlossenen Weg k ?

Diese Frage wird beantwortet durch den Stokesschen Integralsatz. Um ihn zu zitieren, benötigen wir die

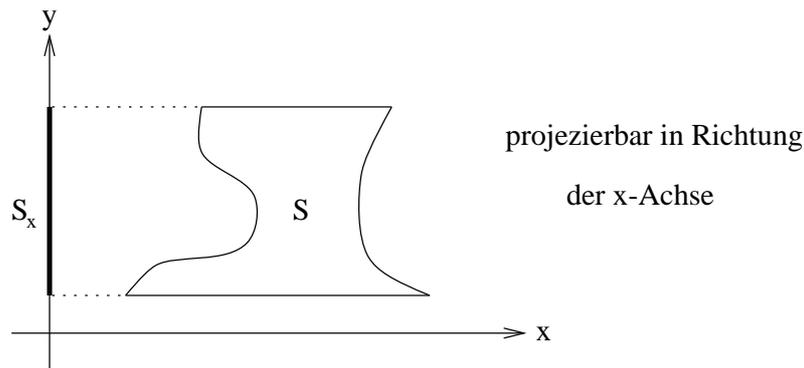
Definition 3.5

Eine Menge $S \subset \mathbb{R}^n$ heißt *projizierbar* in Richtung der x_ν -Achse, wenn es im $(n-1)$ -dimensionalen $(x_1, \dots, x_{\nu-1}, x_{\nu+1}, \dots, x_n)$ -Raum eine meßbare Menge S_{x_ν} und auf S_{x_ν} zwei Funktionen $\underline{x}_\nu, \bar{x}_\nu \in C^1(S_{x_\nu})$ gibt so, daß mit $\mathbf{x}^\nu = (x_1, \dots, x_{\nu-1}, x_{\nu+1}, \dots, x_n)$

$$\bar{S} = \bigcup_{\mathbf{x}^\nu \in S_{x_\nu}} \{(x_1, \dots, x_n) : \underline{x}_\nu(\mathbf{x}^\nu) \leq x_\nu \leq \bar{x}_\nu(\mathbf{x}^\nu)\}.$$

Eine beschränkte Menge $S \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Standardbereich*, wenn sie für jedes $\nu = 1, 2, \dots, n$ in Richtung der x_ν -Achse projizierbar ist.

Beispiel:



Satz 3.6 Stokesscher Integralsatz

Sei $D \subset \mathbb{R}^3$ offen und $\mathbf{v} : D \rightarrow \mathbb{V}^3$, $\mathbf{v} \in C^2(D)$, ein Vektorfeld.

Seien $x_i \in C^1(S)$, $i = 1, 2, 3$; $S \subset \mathbb{R}^2$ und $Rg \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(u, v)} = 2$.

Dann wird durch

$$F = \{(x_1, x_2, x_3); \quad x_i = x_i(u, v), \quad (u, v) \in S\}$$

eine Fläche beschrieben, die in D enthalten sein möge. G sei ein Flächenstück auf F , dessen Urbild in der Parameterebene ein Greenscher Bereich ($\hat{=}$ läßt sich in endlich viele Standardbereiche zerlegen) ist.

Dann gilt

$$(3.6) \quad \int_G (\text{rot } \mathbf{v}) \cdot \boldsymbol{\nu} \, do = \int_{\partial G} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s},$$

$\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$ = äußere Normale der Fläche G im Punkt \mathbf{x} , do = Flächenelement, und

$$(3.7) \quad \text{rot } \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \quad \text{für } \mathbf{x} \in G.$$

Merkregel:
$$\text{rot } \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

Dabei sind $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ die Einheitsvektoren in Richtung der x_1, x_2 bzw. x_3 -Achse.

Dieser Satz legt die Vermutung nahe, daß das Wegintegral über \mathbf{v} wegunabhängig ist, falls $\text{rot } \mathbf{v}$ überall verschwindet. Tatsächlich gilt der

Satz 3.7

Sei $\mathbf{v} : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{V}^3$, D offen und konvex, $\mathbf{v} \in C^2(D, \mathbb{V}^3)$, ein Vektorfeld, so sind äquivalent

1. \mathbf{v} besitzt ein Potential
2. $\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$ auf D .

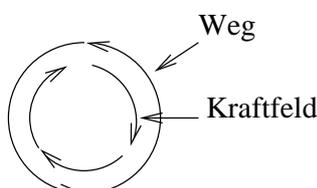
Bemerkungen :

- 1) Die Sätze und Definitionen (3.3) - (3.7) finden sich im Endl/Suh : Analysis II. Sie sind auch unter schwächeren (Differenzierbarkeits-) Voraussetzungen gültig.
- 2) Wendet man auf (3.6) den Mittelwertsatz an, so folgt,

$$(\operatorname{rot} \mathbf{v}(\tilde{\mathbf{x}})) \cdot \boldsymbol{\nu}(\tilde{\mathbf{x}}) = \frac{1}{|G|} \int_{\partial G} \mathbf{v} \, ds$$

d.h. wird \mathbf{v} als Kraftfeld interpretiert, so läßt sich die Normalkomponente von $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ deuten als die Arbeit, die verrichtet werden muß, wenn der Einheitskörper längs ∂G einmal „rund um $\tilde{\mathbf{x}}$ rumgeschoben“ wird, bezogen auf den Inhalt der umlaufenen Fläche.

Anschaulich: Wenn das Kraftfeld einen Wirbel aufweist, muß dazu eine Arbeit geleistet werden.

**3) Veranschaulichung von $\operatorname{rot} \mathbf{v}$**

- (a) Erinnerung: Für Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ ist das

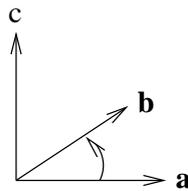
$$\text{Vektorprodukt} \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix},$$

$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ sind die Einheitsvektoren in Richtung der x_1, x_2 bzw. x_3 -Achsen.

Es hat folgende Bedeutung:

In der durch \mathbf{a} und \mathbf{b} aufgespannten Ebene drehe man \mathbf{a} auf kürzesten Wege in \mathbf{b} . Dann steht $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ senkrecht auf \mathbf{a} und \mathbf{b} , derart daß $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ ein Rechtssystem bilden (Korkenzieherregel).

Für den Betrag gilt $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.



Durch Nachrechnen zeigt man sehr schnell

- i. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{d}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{d}$ Distributivität
- ii. $\alpha \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \alpha(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times \alpha \mathbf{b}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, Skalarmultiplikation
- iii. $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$, $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$, $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$.
- iv. Für $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ bestätigt man durch distributives Ausrechnen (vgl. obige Definition)

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}) \times (b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}) \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{k} \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

- (b) Es soll nun die Rotation des Geschwindigkeitsfeldes berechnet werden, welches die Geschwindigkeit der Punkte eines starren Körpers beschreibt, der sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω um eine feste Achse, die durch den Vektor $\mathbf{o} = (p, q, r)$ gegeben ist, dreht.

Ist $|\mathbf{o}| = \omega \hat{=} \text{Winkelgeschwindigkeit}$, gemessen in $\left[\frac{\text{Bogenmaß}}{\text{Zeit}} \right]$, so heißt \mathbf{o} Drehvektor.

Ist \mathbf{x} der Ortsvektor eines Punktes \mathbf{x} des Rotationskörpers, so ergibt sich die Geschwindigkeit \mathbf{v} des Punktes \mathbf{x} als

$$\mathbf{v} = \mathbf{o} \times \mathbf{x}$$

(vgl. die Definition von $\mathbf{o} \times \mathbf{x}$ und beachte, daß $|\mathbf{x}| \sin(\mathbf{o}, \mathbf{x})$ der Abstand des Punktes \mathbf{x} von der Drehachse ist). Mit $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ gilt (vgl.(a))

$$\mathbf{o} \times \mathbf{x} = (qx_3 - rx_2, rx_1 - px_3, px_2 - qx_1).$$

Berechnet man nun $\text{rot } \mathbf{v} = \text{rot}(\mathbf{o} \times \mathbf{x})$ gemäß (3.7), so folgt

$$\text{rot } \mathbf{v} = 2\mathbf{o}.$$

Bis auf den Faktor 2 ist die Rotation gleich dem Drehvektor, der das Geschwindigkeitsfeld festlegt. Hieraus erklärt sich auch seine Bezeichnung „Rotation“ (rot, auf englisch: curl).

Dieses Beispiel macht deutlich, daß $\text{rot } \mathbf{v} = 0$ bedeutet, daß das Vektorfeld keine Wirbel hat.

Die Divergenz und der Satz von Gauß

Gegeben sei ein Vektorfeld $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\mathbf{v} : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{V}^3$, das wir als Geschwindigkeitsfeld einer Flüssigkeitsströmung interpretieren. Dann kann man fragen, welche Flüssigkeitsmenge (Volumen) pro Zeiteinheit durch eine gegebene Fläche fließt. Sie ist offensichtlich abhängig von der Stellung der Fläche zur Strömungsrichtung. Ist $d\mathbf{f}$ der Flächennormalvektor eines Flächenstücks, dessen Betrag gleich dem Flächeninhalt ist, so wird das Volumen der pro Zeiteinheit durch die Fläche fließenden Menge durch

$$\mathbf{v} \cdot d\mathbf{f} = |\mathbf{v}| |d\mathbf{f}| \cos(\mathbf{v}, d\mathbf{f})$$

beschrieben, d.h. maßgeblich für die durchfließende Menge ist die zur Fläche F senkrechte Komponente \mathbf{v}_\perp von \mathbf{v} oder die Projektion \tilde{F} der Fläche auf eine Ebene senkrecht zur Strömungsrichtung: $\tilde{F} = \Delta F \cos \alpha$, $\alpha = \angle(\mathbf{v}, d\mathbf{f})$.



Ist τ ein Volumen mit der Oberfläche F und $d\mathbf{f}$ die äußere Flächennormale, so wird durch

$$(3.8) \quad D = \frac{1}{\tau} \int_F \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f}$$

die auf das Volumen τ bezogene Differenz der in das Volumen τ ein- und ausfließenden Flüssigkeit beschrieben. Die herausfließende Flüssigkeit wird positiv gerechnet, da $\angle(\mathbf{v}, d\mathbf{f}) < 90^\circ$, also $\cos \alpha > 0$. Wenn aus τ mehr raus (rein) als rein (raus) fließt, enthält τ eine Quelle (Senke). D ist deshalb ein Maß für die Ergiebigkeit (Divergenz) des Volumenstückchens τ . Die **Divergenz** ($\hat{=}$ Ergiebigkeit des Feldes im Punkt \mathbf{x}) ist der Grenzwert, den man erhält, wenn man das Volumenstück auf einen Punkt \mathbf{x} zusammenzieht.

$$(3.9) \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int_F \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f} =: \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}).$$

Man kann zeigen, daß dieser Grenzwert tatsächlich existiert und im Wesentlichen von der Gestalt von τ unabhängig ist, und man kann zeigen, ausgehend von (3.9), daß in einem rechtwinkligen Koordinationssystem im \mathbb{R}^3 , falls $\mathbf{v} \in C^1(D, \mathbb{V}^3)$, folgende Darstellung gilt

$$(3.10) \quad \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{\partial v_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3(\mathbf{x})}{\partial x_3}.$$

Diesen Weg wollen wir hier jedoch nicht beschreiten, sondern uns im Wesentlichen mit der Angabe des Satzes von Gauß begnügen.

Um uns nicht mit den Voraussetzungen an das Gebiet abplagen zu müssen, für das der Gaußsche Satz gilt, erklären wir:

Definition 3.8

Ein *Normalgebiet* ist ein beschränktes Gebiet, das so beschaffen ist, daß der folgende Satz gilt.

Satz 3.9 Gaußscher Integralsatz

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Normalgebiet, $u \in C^0(\bar{G}) \cap C^1(G)$ und außerdem $u_{x_i} \in L(G)$, dann ist

$$(3.11) \quad \int_G u_{x_i} d\mathbf{x} = \int_{\partial G} u \cdot \nu_i d\sigma, \quad i = 1, \dots, n$$

wobei $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ die äußere Normale (das ist ein Einheitsvektor) der Randfläche ∂G ist.

Hieraus folgt sofort für eine Vektorfunktion

$\mathbf{v} \in C^0(\bar{G}, \mathbb{R}^n) \cap C^1(G, \mathbb{R}^n)$ mit $\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \in L(G)$, $i, j = 1, \dots, n$:

$$(3.12) \quad \int_G \operatorname{div} \mathbf{v} d\mathbf{x} = \int_{\partial G} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu} d\sigma,$$

wobei

$$(3.13) \quad \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i(\mathbf{x})}{\partial x_i}.$$

Bemerkungen:

- 1) Beispielsweise ist jede endliche Vereinigung von Standardbereichen (vgl. Definition 3.5) ein Normalgebiet.
- 2) Wendet man auf (3.12) den Mittelwertsatz an, so erhält man unmittelbar die Verbindung zu (3.9) und (3.10).

Mit Hilfe des Gaußschen Satzes lassen sich die im nächsten Satz zitierten Greenschen Formeln beweisen (Übung).

Satz 3.10 Greensche Formeln

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Normalgebiet, $u, v \in C^1(\bar{G}) \cap C^2(G)$, $\Delta u, \Delta v \in L(G)$.

Dann gilt die

1. *Greensche Formel*

$$\int_G (u\Delta v + \text{grad } u \cdot \text{grad } v) \, d\mathbf{x} = \int_{\partial G} u (\text{grad } v) \cdot \boldsymbol{\nu} \, do, \quad \boldsymbol{\nu} = \text{äußere Normale}$$

und die

2. *Greensche Formel*

$$\int_G (u\Delta v - v\Delta u) \, d\mathbf{x} = \int_{\partial G} \left(u \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}} - v \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} \right) \, do.$$

Die Kontinuitätsgleichung und die Potentialgleichung

Die Kontinuitätsgleichung beschreibt die Stoffbilanz in einem Volumen τ , das von einem Stoff (z.B. einer Flüssigkeit) durchflossen wird. Modellierungsgrundlage: Massenerhaltungsgesetz. Sei

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) : D (\subset \mathbb{R}^3) \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

ein Vektorfeld, das die Fließgeschwindigkeit einer Flüssigkeit beschreibt und ρ ihre spezifische Dichte. Mit ΔF bezeichnen wir ein Oberflächenstück von τ mit dem Normalenvektor $d\mathbf{f}$, $|d\mathbf{f}|$ ist der Flächeninhalt von ΔF .

Durch ΔF fließt pro Zeiteinheit die Menge

$$dQ = \rho |\mathbf{v}| \Delta F \cos \alpha = \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f}, \quad \alpha = \angle(\mathbf{v}, d\mathbf{f}) \quad (\text{Skalarprodukt}).$$

Damit gilt für die Differenz Q_1 der Flüssigkeiten, die pro Zeiteinheit aus einem Volumen τ durch die Oberfläche F heraus- bzw. hineinfließen (vgl. (3.8))

$$(3.14) \quad Q_1 = \int_F \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f} = \int_F \rho \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu} \, do, \quad \boldsymbol{\nu} = \text{äußere Normale.}$$

Die ausströmende Flüssigkeit wird positiv gerechnet, da dann $\angle(\mathbf{v}, \boldsymbol{\nu}) < 90^\circ$, also $\cos \alpha > 0$.

Die Flüssigkeit in τ wird gegeben durch

$$(3.15) \quad Q_2 = \int_{\tau} \rho \, d\mathbf{x}.$$

Wird ρ als differenzierbar vorausgesetzt und sind in τ weder Quellen noch Senken vorhanden, so fließt in der Zeit dt die Flüssigkeitsmenge

$$-dt \int_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathbf{x}$$

heraus, d.h. in der Zeiteinheit fließt heraus:

$$(3.16) \quad Q_3 = - \int_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathbf{x}.$$

Es fließt etwas heraus, wenn ρ abnimmt, und herausfließende Mengen werden als positiv vereinbart, daher $Q_3 = - \int \int \int$.

Sind weder Quellen noch Senken vorhanden, so gilt nach dem Massenerhaltungsgesetz $Q_1 = Q_3$:

$$\int_F \rho \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu} d\sigma = - \int_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathbf{x}.$$

Nach dem Satz von Gauß (Satz 3.9)

$$\int_{\partial G} \rho \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu} d\sigma = \int_G \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) d\mathbf{x},$$

geht diese Gleichung über in

$$\int_{\tau} \left(\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) d\mathbf{x} = 0.$$

Da dies für jedes Volumen gilt, muß gelten

$$(3.17) \quad \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad \text{Kontinuitätsgleichung}$$

Insbesondere gilt für inkompressible Flüssigkeiten (ohne Quellen und Senken, $\rho = \text{const.}$)

$$(3.18) \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Ist diese Flüssigkeitsströmung wirbelfrei ($\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$), so ist \mathbf{v} als Gradient eines Geschwindigkeitspotentials φ darstellbar: $\mathbf{v} = \operatorname{grad} \varphi$ (vgl. Satz 3.7). Wird das in (3.18) eingesetzt, so folgt

$$(3.19) \quad \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \varphi_{x_1 x_1} + \varphi_{x_2 x_2} + \varphi_{x_3 x_3} = \Delta \varphi = 0 \quad \text{Potentialgleichung.}$$

Um genauere Einblicke in die Potentialgleichung zu erhalten, betrachten wir nochmals die

räumliche Wärmeleitung

Wenn wir uns nicht auf den 1-dimensionalen Fall beschränken, muß man die Richtung des Wärmeflusses berücksichtigen.

Gesetz von Fourier: Ist die Temperatur eines Körpers ungleichmäßig verteilt, so entsteht ein Wärmefluß in Richtung des Temperaturgefälles d.h. in Richtung $-\text{grad } T$ (vgl. Satz 3.1 a)

Sei F die Oberfläche eines Körpers mit Wärmeleitvermögen λ . Durch ein Flächenelement ΔF von F mit dem Normalenvektor $d\mathbf{f} = \boldsymbol{\nu} \cdot do$, $\boldsymbol{\nu}$ = Flächennormaleneinheitsvektor, $|d\mathbf{f}| = do$, fließt in der Zeit dt also die Wärmemenge (vgl. S.13 und Zeichnung S.23)

$$(3.20) \quad dQ = \lambda \text{ grad } T \cdot \boldsymbol{\nu} \, do \, dt,$$

Die Wärmemenge, die durch die Oberfläche F eines Körpers mit dem Volumen τ in der Zeit $\Delta t = t_2 - t_1$ hineinfließt, wird damit gegeben durch

$$(3.21) \quad Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} \int_F \lambda \text{ grad } T \cdot \boldsymbol{\nu} \, do \, dt, \quad \boldsymbol{\nu} = \text{äußere Normale.}$$

Die einfließende Wärmemenge wird positiv gerechnet, denn es fließt Wärme hinein, wenn $\text{grad } T$ nach außen gerichtet ist.

Bezeichnet $F(\mathbf{x}, t)$ die Dichte der Wärmequellen ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$), so erhalten wir für die im Volumen τ in der Zeit $\Delta t = t_2 - t_1$ freiwerdende Wärmemenge

$$(3.22) \quad Q_2 = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\tau} F(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} \, dt.$$

Die Wärmemengen $Q_3 = Q_2 + Q_1$ erwärmen den Körper gemäß

$$(3.23) \quad Q_3 = \int_{\tau} c\rho(T(\mathbf{x}, t_2) - T(\mathbf{x}, t_1)) \, d\mathbf{x}, \quad \text{vgl. (2.22).}$$

Nach dem Satz von Gauß gilt, vgl. (3.12)

$$(3.24) \quad Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\tau} \text{div}_{\mathbf{x}}(\lambda \text{ grad}_{\mathbf{x}} T) \, d\mathbf{x} \, dt.$$

Bemerkung: Die tiefgestellten Indizes zeigen an, auf welche Variablen sich die Differentialoperatoren beziehen.

Der Energiesatz lautet $Q_1 + Q_2 = Q_3$ und gibt damit die Gleichung der räumlichen

Wärmeleitung in Integralform.

Mit Hilfe der Mittelwertsätze folgt

$$\begin{aligned} \text{aus (3.24): } Q_1 &= \operatorname{div}_x(\lambda(\tilde{\mathbf{x}}) \operatorname{grad}_x T(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t})) \tau \Delta t, \\ \text{aus (3.22): } Q_2 &= F(\bar{\mathbf{x}}, \bar{t}) \tau \Delta t, \\ \text{aus (3.23): } Q_3 &= c\rho \frac{\partial}{\partial t} T(\hat{\mathbf{x}}, \hat{t}) \tau \Delta t. \end{aligned}$$

Der Energiesatz $Q_1 + Q_2 = Q_3$ liefert nach Division durch $\tau \Delta t$ und Grenzübergang $\tilde{t}, \hat{t}, \bar{t} \rightarrow t, \quad \tilde{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}} \rightarrow \mathbf{x}$

die **räumliche Wärmeleitungsgleichung**

$$(3.25) \quad \operatorname{div}_x(\lambda(\mathbf{x}) \operatorname{grad}_x T(\mathbf{x}, t)) + F(\mathbf{x}, t) = c\rho \frac{\partial}{\partial t} T(\mathbf{x}, t).$$

Für homogene Körper ($\lambda = \text{const.}$) erhalten wir unter Beachtung von

$$\operatorname{div}_x \operatorname{grad}_x \varphi = \Delta_x \varphi, \quad \varphi \in C^2,$$

$$(3.26) \quad \Delta_x T + \frac{F}{\lambda} = \frac{c\rho}{\lambda} T_t.$$

Bemerkung: Die tiefgestellten Indizes werden in der Literatur üblicherweise unterdrückt, da die Differentialoperatoren sich bei Evolutionsgleichungen (d.h. zeitabhängigen Gleichungen) nach allgemeiner Übereinkunft nur auf die Raumvariablen beziehen.

Zur Lösung dieser Gleichung benötigt man für die Eindeutigkeit

a) Anfangswerte im Körper, vgl. S. 15

$$T(\mathbf{x}, 0) = \varphi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \tau, \quad \varphi \text{ gegeben.}$$

b) Zeitabhängige Randwerte, vgl. etwa S. 14

$$T(\mathbf{x}, t) = \psi(\mathbf{x}, t), \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\tau, \quad \psi \text{ gegeben.}$$

Nun interessiert uns, was passiert, wenn wir die Randwerte zeitlich konstant halten, ebenso wie die Wärmequellen ($F(\mathbf{x}, t) = F(\mathbf{x})$), und warten, bis sich ein stationärer Zustand eingestellt hat. Dieser Zustand wird durch unsere Differentialgleichung (3.26) beschrieben, wenn wir $T_t = 0$ setzen (stationäre, keine zeitabhängige Änderung mehr). Wir erhalten für eine *stationäre Wärmeströmung*, d.h. ($T(\mathbf{x}, t) = T(\mathbf{x})$), die

inhomogene Potentialgleichung

$$(3.27) \quad \Delta T = -\frac{F}{\lambda}, \quad \mathbf{x} \in \tau.$$

Als Vorgaben zur eindeutigen Festlegung der Lösung können offensichtlich nur noch die zeitunabhängigen Randwerte dienen

$$(3.28) \quad T(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\tau, \quad \psi \text{ vorgegeben.}$$

Wir haben also für die *Potentialgleichung* eine reine Randwertaufgabe. Sie heißt *Dirichlet-Problem*, falls Funktionswerte (und ggf. Ableitungen) auf dem Rand vorgegeben werden und *Neumann-Problem*, falls nur Ableitungen vorgegeben sind.

Zum Abschluß dieses Paragraphen wollen wir – ohne Herleitung – ein System von partiellen Differentialgleichungen angeben – die sog. Maxwell-Gleichungen – welches von eminenter Bedeutung in der Physik ist, weil sich daraus ein großer Teil der Elektrodynamik ableiten läßt, und welches zeigt, daß die in diesen Kapitel eingeführten Begriffe wesentliche Differentialoperatoren der theoretischen Physik darstellen.

Es seien	\mathcal{E}	=	Vektor der elektrischen Feldstärke,
	\mathcal{H}	=	Vektor der magnetischen Feldstärke,
	\mathcal{D}	=	Vektor der elektrischen Induktion,
	\mathcal{B}	=	Vektor der magnetischen Induktion,
	j	=	Stromdichtevektor der Leiterströme,
	$j^{(e)}$	=	die durch den Einfluß der elektromagnetischen Kraft hervorgerufene Stromdichte,
	ϱ	=	Ladungsdichte,
	c	=	Lichtgeschwindigkeit im Vakuum.

Beziehen sich rot und div nur auf die Ortskoordinaten, so gilt

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathcal{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} (j + j^{(e)}), \\ \text{rot } \mathcal{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t}, \\ \text{div } \mathcal{B} &= 0, \\ \text{div } \mathcal{D} &= 4\pi\varrho. \end{aligned}$$

Literatur zu diesem Kapitel: Tychonoff-Samarski, Michlin, Smirnov II und IV, Endl/Luh: Analysis II, sowie die Lehrbücher über theoretische Physik von Gerthsen, Joos, Bergmann/Schäfer.