

Vorsicht:

Dieser Satz ist für komplexwertige Funktionen falsch!

Beispiel: $f(x) = e^{ix} - 1 = \cos x + i \sin x - 1$, $[\alpha, \beta] = [0, 2\pi]$.

Die folgenden Überlegungen sind also nur für reellwertige Funktionen richtig.

Wir setzen also voraus

$$\begin{aligned} f : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}, \quad (\text{reellwertig}) \\ f &\in C^{n+1}[a, b] \quad (\text{d.h. } f \text{ gehört zur Menge der Funktionen, die} \\ &\quad \text{auf dem Intervall } [a, b] \text{ } (n+1)\text{-mal stetig} \\ &\quad \text{differenzierbar sind}) \end{aligned}$$

und wenden den Satz von Rolle an auf die Differenz $r(x)$ (vgl. (3.10))

$$\begin{aligned} r(x) &:= \varepsilon(x) - f[x_0, \dots, x_n, z] \prod_{i=0}^n (x - x_i), \quad z \text{ beliebig aber fest} \\ &= f(x) - p_n(x) - f[x_0, x_1, \dots, x_n, z] \prod_{i=0}^n (x - x_i) \end{aligned} \quad (3.11)$$

und die Ableitungen von r . Beachte, daß $r \in C^{n+1}[a, b]$.

$r(x)$ hat $n+2$ Nullstellen : $x_0, x_1, \dots, x_n, z$. Zwischen je zwei Nullstellen von r liegt nach Satz 3.6 eine Nullstelle von $r'(x)$, also folgt

$r'(x)$ hat $n+1$ Nullstellen, und analog

$r''(x)$ hat n Nullstellen

$\vdots$

$r^{(n+1)}(x)$ hat eine Nullstelle ξ : $r^{(n+1)}(\xi) = 0$, $\xi \in [a, b]$.

Nun ist $f \in C^{n+1}[a, b]$, $p_n \in \Pi_n$ also $p_n^{(n+1)} \equiv 0$, $f[x_0, x_1, \dots, x_n, z]$ eine Zahl und $\prod_{i=0}^n (x - x_i)$ ein Polynom, dessen $(n+1)$ ste Ableitung $= (n+1)!$ ist. Deshalb folgt aus (3.11) und $r^{(n+1)}(\xi) = 0$

$$r^{(n+1)}(\xi) = 0 = f^{(n+1)}(\xi) - f[x_0, x_1, \dots, x_n, z] \cdot (n+1)!$$

bzw. (setze $z = x_{n+1}$)

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}] = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \quad \xi \in [a, b]. \quad (3.12)$$

Wird dies in $\varepsilon(z)$ eingesetzt (vgl. (3.10)), so folgt

$$\varepsilon(z) = f(z) - p_n(z) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \cdot \prod_{i=0}^n (z - x_i) \quad (3.13)$$

mit einer von z abhängigen Stelle $\xi \in [a, b]$.

Die Herleitung gilt zunächst für $z \neq x_i$, doch ist (3.13) trivialerweise auch für $z = x_i$ richtig. Beachte ferner, daß bei festen Knoten x_i , $i = 0, \dots, n$ die Zwischenstelle ξ von z abhängt. Zusammengefaßt gilt also:

Satz 3.7

$p_n \in \Pi_n$ interpoliere die Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ an den Stützstellen $x_i \in [a, b]$, $i = 0, 1, \dots, n$, $-\infty < a, b < \infty$.

a) Dann gilt für den Interpolationsfehler (vgl. (3.10))

$$(3.10) \quad f(z) - p_n(z) = f[x_0, x_1, \dots, x_n, z] \prod_{i=0}^n (z - x_i), \quad z \in [a, b], \quad z \neq x_i, \quad \forall i$$

b) Ist zusätzlich $f \in C^{n+1}[a, b]$, so gibt es ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$(3.12) \quad f[x_0, x_1, \dots, x_{n+1}] = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \quad x_i \in [a, b], \quad i = 0, \dots, n+1, \\ x_i \neq x_j \quad \text{für } i \neq j$$

und der Interpolationsfehler kann dargestellt werden durch (3.13)

$$(3.13) \quad f(x) - p_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x) \cdot \prod_{i=0}^n (x - x_i), \\ \forall x \in [a, b], \quad \xi_x \in [a, b], \quad \text{abhängig von } x$$

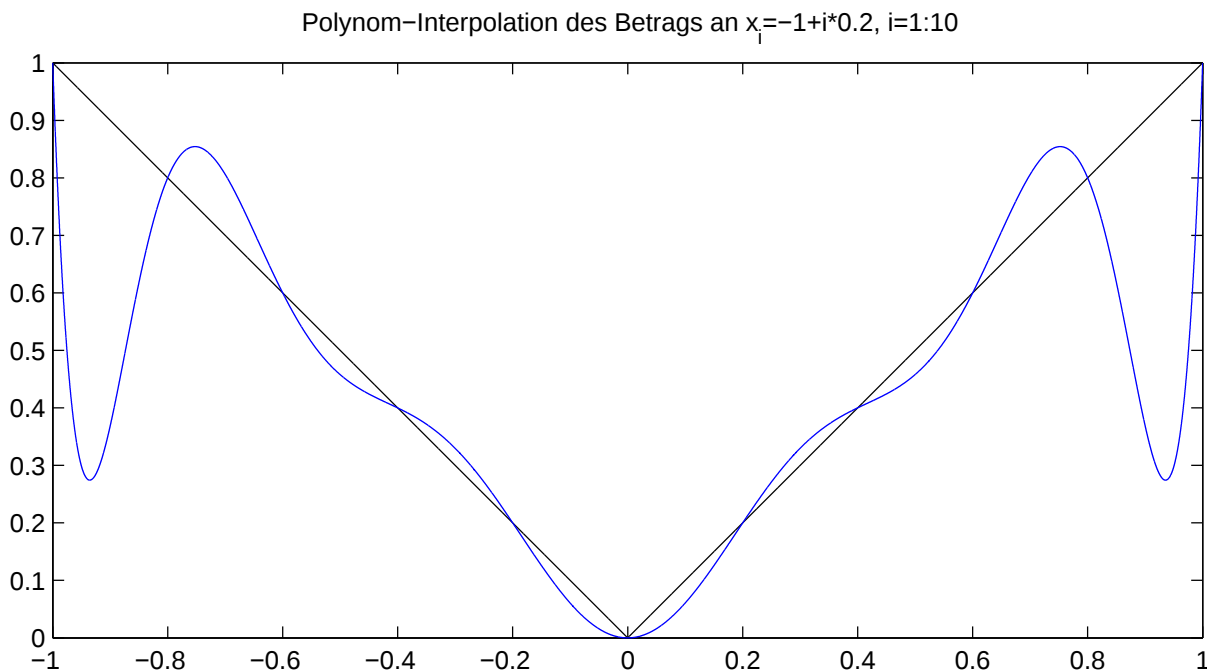
bzw.

$$(3.14) \quad |f(x) - p_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \max_{\xi \in [a, b]} |f^{(n+1)}(\xi)| \cdot \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right|.$$

Bemerkungen:

- 1) Daß $\max_{\xi \in [a, b]} |f^{(n+1)}(\xi)|$ unter den Voraussetzungen unseres Satzes existiert, wird in der Analysis bewiesen. Für $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$ ist diese Aussage z.B. falsch (da $f \notin C^{n+1}[0, 1]$, sondern nur $\in C^{n+1}(0, 1)$)
- 2) Da der Existenzbeweis für die Zwischenstelle ξ nicht konstruktiv ist, ist die betragsmäßige Abschätzung des Interpolationsfehlers für praktische Zwecke günstiger.

Als Beispiel interpolieren wir die Betragsfunktion im Intervall $[-1, 1]$ an 11 äquidistanten Stützstellen.

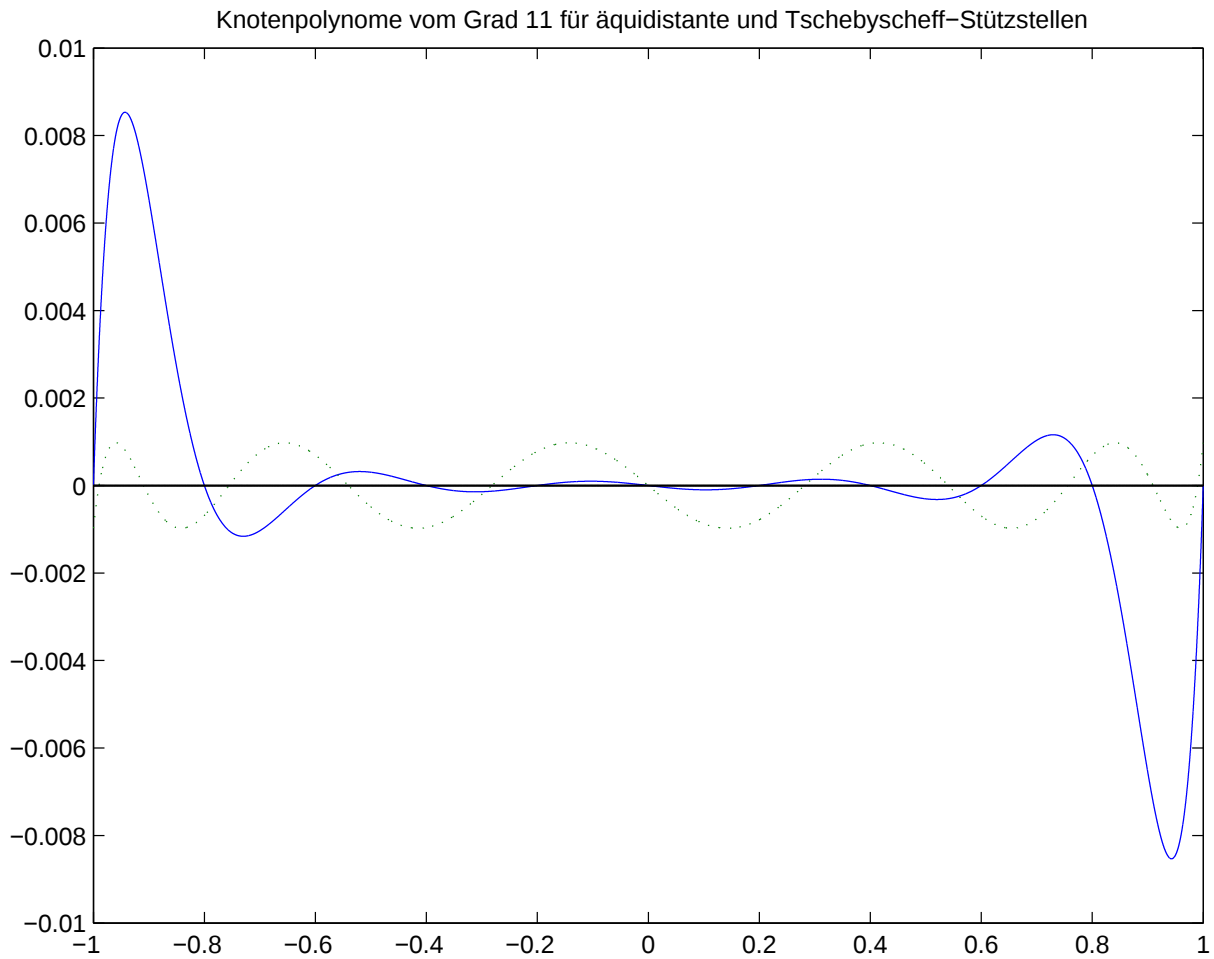


Auffällig sind die großen Fehler in der Nähe der Intervallränder. Die Fehlerabschätzung gibt Anlaß zu überlegen, ob und wie man den Approximationsfehler verkleinern kann. Den Ausdruck $f^{(n+1)}(\xi)/(n+1)!$ kann man nicht beeinflussen, da ξ nicht konstruktiv ist, wohl aber das

$$\text{Knotenpolynom} \quad w(x) := \prod_{i=0}^n (x - x_i), \quad (3.15)$$

denn über die Wahl der x_i wurde bisher noch nicht verfügt.

Nun zeigen numerische Beispiele, daß bei äquidistanter Knotenwahl die Ausschläge von $w(x)$ an den Intervallenden besonders groß werden. Die maximalen Ausschläge werden kleiner, wenn man die Stützstellen mehr auf den Rand der Intervalle konzentriert. Dafür werden die Ausschläge in der Intervallmitte etwas größer. Typisch hierfür ist folgendes Bild, das den Funktionsverlauf von $w(x)$ in $[-1, 1]$ für $n = 10$ (d.h. 11 äquidistant verteilte Stützstellen in $[-1, 1]$) zeigt (durchgezogene Linie) und gestrichelt den Verlauf, wenn man als Stützstellen die sogenannten Tschebyscheff-Stellen wählt (natürlich ebenfalls 11 Stück, vgl. dazu den folgenden Satz).



Es stellt sich also folgende

Frage: Wie kann man die Stützstellen (Knoten) $x_i \in [a, b]$, $i = 0, 1, \dots, n$, wählen, damit der maximale Funktionswert $\max_{x \in [a, b]} \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right|$ möglichst klein wird? D.h. gesucht wird

$$\min_{x_0, \dots, x_n} \max_{x \in [a, b]} \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right|$$

(sofern das Minimum existiert, was a priori nicht klar ist).

Zunächst sollte jedoch im Vorwege geklärt werden, ob man dieses Min. (falls existent) für jedes Intervall gesondert suchen muß oder ob man sich auf ein Referenzintervall beschränken kann. Letzteres ist tatsächlich der Fall. Wir zeigen zunächst:

Werden das Intervall $[a, b]$, $(-\infty < a < b < \infty)$, und die Stützstellen $x_i \in [a, b]$ durch die umkehrbar eindeutige lineare Transformation

$$y = c + \frac{x-a}{b-a}(d-c) \quad (3.16)$$

auf das Intervall $[c, d]$, $(-\infty < c < d < \infty)$, und die Werte y_i abgebildet, so werden auch die Extrema von $w(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$ auf die Extrema von $\tilde{w}(y) = \prod_{i=0}^n (y - y_i)$ abgebildet.

Die Behauptung ergibt sich aus der Beziehung

$$\begin{aligned} \tilde{w}(y) &= \prod_{i=0}^n (y - y_i) = \prod_{i=0}^n \left(\left[c + \frac{x-a}{b-a}(d-c) \right] - \left[c + \frac{x_i-a}{b-a}(d-c) \right] \right) \\ &= \left(\frac{d-c}{b-a} \right)^{n+1} \prod_{i=0}^n (x - x_i) = \left(\frac{d-c}{b-a} \right)^{n+1} w(x) \end{aligned} \quad (3.17)$$

und

$$\frac{d\tilde{w}(y(x))}{dx} = \tilde{w}'(y) \cdot \frac{dy(x)}{dx} = \left(\frac{d-c}{b-a} \right)^{n+1} w'(x).$$

Es ist also $w'(x) = 0$ genau dann, wenn $\tilde{w}'(y) = 0$ mit $y = y(x)$ gem. (3.16), denn $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{d-c}{b-a} \right) \neq 0$. ■

Wir können für die weiteren Untersuchungen also das Referenzintervall $[-1, 1]$ ($c = -1$, $d = +1$) wählen, geeignete Stützstellen $y_i \in [-1, 1]$ für $\tilde{w}(y)$ so bestimmen, daß $\max_{y \in [-1, 1]} \left| \prod_{i=0}^n (y - y_i) \right|$ minimal wird und danach die Stützstellen $x_i \in [a, b]$ durch die Rücktransformation

$$x_i = a + \frac{y_i - c}{d - c}(b - a) = a + \frac{y_i + 1}{2}(b - a)$$

bestimmen.

Dann wird unsere vorseitige Frage durch die folgenden beiden Sätze beantwortet.

Satz 3.8 (Tschebyscheff–Polynome)

a) Die Funktionen $T_n(y)$, die definiert werden durch

$$(3.18) \quad T_n(y) = \cos(n \arccos y), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad y \in [-1, 1]$$

genügen der Rekursionsformel

$$(3.19) \quad T_{n+1}(y) = 2yT_n(y) - T_{n-1}(y), \quad T_0(y) = 1, \quad T_1(y) = y, \quad n \in \mathbb{N},$$

sind also Polynome vom Grad n ($T_n \in \Pi_n$: Tschebyscheff–Polynome).

b) T_n hat die n verschiedenen (Tschebyscheff–) Nullstellen

$$(3.20) \quad y_j = \cos\left(\frac{2j+1}{2n}\pi\right) \in (-1, 1), \quad j = 0, 1, \dots, n-1$$

und nimmt im Intervall $[-1, 1]$ seine Extrema an in den $n+1$ Extremalstellen

$$(3.21) \quad y_j^{(e)} = \cos\left(\frac{j\pi}{n}\right) \in [-1, 1], \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

mit den Extremalwerten

$$(3.22) \quad T_n(y_j^{(e)}) = (-1)^j, \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

c) T_n besitzt die Darstellung

$$(3.23) \quad T_n(y) = 2^{n-1} \prod_{j=0}^{n-1} (y - y_j), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Unsere Frage nach der bestmöglichen Fehlerabschätzung für die Interpolation wird dann beantwortet durch

Satz 3.9

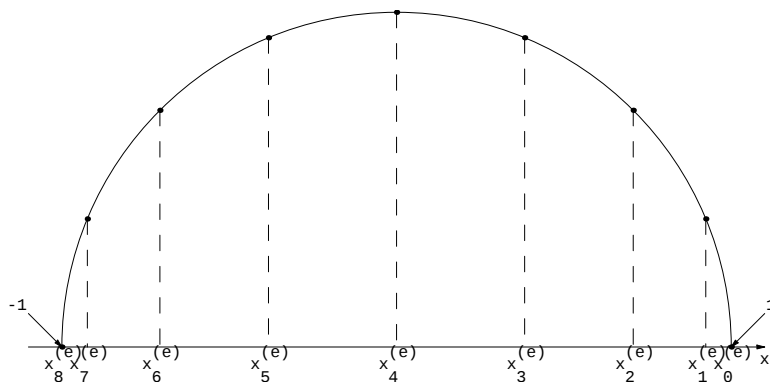
Der maximale Extremalwert von $|w(y)| = \left| \prod_{j=0}^n (y - y_j) \right|$ für $y \in [-1, 1]$ wird minimiert, wenn man als y_j die T -Nullstellen von T_{n+1} wählt, d.h. für alle $q(y) := \prod_{j=0}^n (y - \xi_j)$ mit paarweise verschiedenen Werten $\xi_j \in \mathbb{R}$ gilt

$$\max_{y \in [-1, 1]} |w(y)| \leq \max_{y \in [-1, 1]} |q(y)| \quad (3.24)$$

Vor den Beweis dieser Sätze stellen wir noch einige

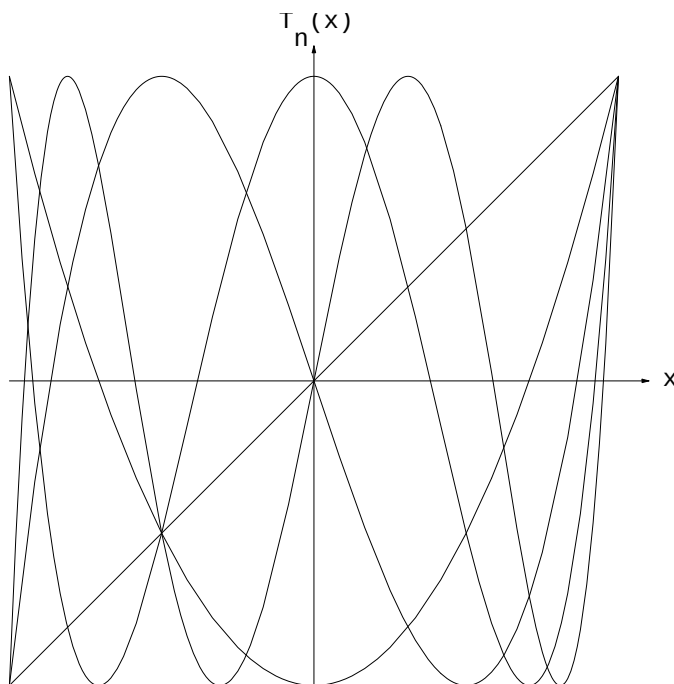
Bemerkungen

- 1) Durch (3.18) sind die T_n nur für das Intervall $[-1, 1]$ definiert, sie können aber natürlich mittels (3.19) auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt werden.
- 2) **Alle** Nullstellen der T -Polynome liegen in $(-1, 1)$, sie sind, ebenso wie die Extremalstellen $y_j^{(e)}$, symmetrisch zum Nullpunkt verteilt. Man kann sie sich geometrisch vorstellen als Projektionen von regelmäßig auf dem Halbkreis verteilten Punkten, z.B.



Extremalstellen von $T_8(x)$

- 3) Die Nullstellen und Extremalstellen in (3.20), (3.21) sind in absteigender Reihenfolge geordnet: $y_{j+1} < y_j$.
- 4) Zwei der Extremalstellen $\in [-1, 1]$ sind keine Waagepunkte von T_n sondern Randmaxima bzw. Randminima. Vergleiche dazu auch



Tschebyscheff-Polynome $T_n(x)$, $n = 1(1)5$.

5) Aus (3.22) und (3.23) folgt

$$(3.25) \quad \left| \prod_{j=0}^{n-1} (y - y_j) \right| = 2^{-(n-1)} |T_n(y)| \leq 2^{-(n-1)} \quad \text{in} \quad [-1, 1].$$

Das Gleichheitszeichen wird in den Extremalstellen (3.21) angenommen.

Beweis Satz 3.8

a) Grundlage des Beweises ist die trigonometrische Identität

$$(3.26) \quad \cos[(n+1)z] + \cos[(n-1)z] = 2 \cos z \cos(nz), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Man bestätigt sie sofort mit Hilfe der Additionstheoreme

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

indem man auf der linken Seite von (3.26) $\alpha = nz$, $\beta = z$ setzt.

Setzt man in (3.26) $z = \arccos y$, so folgt

$$T_{n+1}(y) + T_{n-1}(y) = 2y T_n(y).$$

Die Anfangswerte $T_0(y) = 1$, $T_1(y) = y$ erhält man sofort aus (3.18). Damit ist das Bildungsgesetz (3.19) für die Funktionen (3.18) bewiesen. Es zeigt — mittels vollständiger Induktion — sofort $T_n \in \Pi_n$.

b) Die $\cos$ -Nullstellen sind bekannt. Aus (vgl. (3.18))

$$\cos(n \arccos y) = 0 \quad \text{folgt}$$

$$n \arccos y = (2k+1) \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \text{bzw.}$$

$$y_j = \cos\left(\frac{2j+1}{2n} \pi\right), \quad j = 0, 1, \dots, n-1, \quad n \geq 1, \quad \text{also (3.20).}$$

Man kann sich auf $j = 0, 1, \dots, n-1$ beschränken, danach wiederholen sich die Nullstellen auf Grund der Periodizität von $\cos$.

Die Extremalstellen der $\cos$ -Funktion sind bekannt. Aus $|\cos(n \arccos y)| = 1$ folgt $n \arccos y = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ also $y_j^{(e)} = \cos \frac{j\pi}{n}$, $j = 0, \dots, n$ (Periodizität) und $T(y_j^{(e)}) = (-1)^j$ durch Einsetzen in (3.18), also sind (3.19) – (3.22) bewiesen.

c) Da $T_n \in \Pi_n$ die n Nullstellen y_j besitzt, hat es die Form $T_n(y) = c_n \prod_{j=0}^{n-1} (y - y_j)$ mit einer Konstanten c_n . Dies folgt aus (2.3) (Horner-Schema).

Aus dem Bildungsgesetz (3.19) für T_n folgt, daß der Koeffizient c_n von y^n gleich 2^{n-1} ist, also gilt (3.23). ■

Beweis Satz 3.9 (indirekt):

Wir nehmen an (vgl. (3.24))

$$\max_{y \in [-1,1]} |q(y)| = \max_{y \in [-1,1]} \left| \prod_{j=0}^n (y - \xi_j) \right| < \max_{y \in [-1,1]} |w(y)| = \max_{y \in [-1,1]} \left| \prod_{j=0}^n (y - y_j) \right|.$$

Wir leiten nun mit Hilfe von Satz 3.8 (für „ $n+1$ “ statt „ n “, da Satz 3.9 Aussagen über T_{n+1} macht) einen Widerspruch her.

Beachte dazu: Die Extremalstellen sind absteigend nummeriert und ihre Funktionswerte haben gleichen Betrag aber alternierendes Vorzeichen (vgl. dazu Satz 10.6). Aus der Annahme folgt für die Funktionswerte $q(y_j^{(e)})$ in den Extremalstellen von T_{n+1} (vgl. (3.21)–(3.23) für $n+1$ statt n)

$$\begin{aligned} q(y_0^{(e)}) &\leq \max_{y \in [-1,1]} |q(y)| < \max_{y \in [-1,1]} \left| \prod_{j=0}^n (y - y_j) \right| = 2^{-n} = w(y_0^{(e)}), \\ q(y_1^{(e)}) &\geq -\max_{y \in [-1,1]} |q(y)| > -\max_{y \in [-1,1]} \left| \prod_{j=0}^n (y - y_j) \right| = -2^{-n} = w(y_1^{(e)}), \\ q(y_2^{(e)}) &< 2^{-n} = w(y_2^{(e)}) \\ &\vdots \end{aligned}$$

allgemein also

$$q(y_j^{(e)}) \begin{cases} < w(y_j^{(e)}), & \text{falls } j \text{ gerade} \\ > w(y_j^{(e)}), & \text{falls } j \text{ ungerade, } j = 0, 1, \dots, n+1. \end{cases}$$

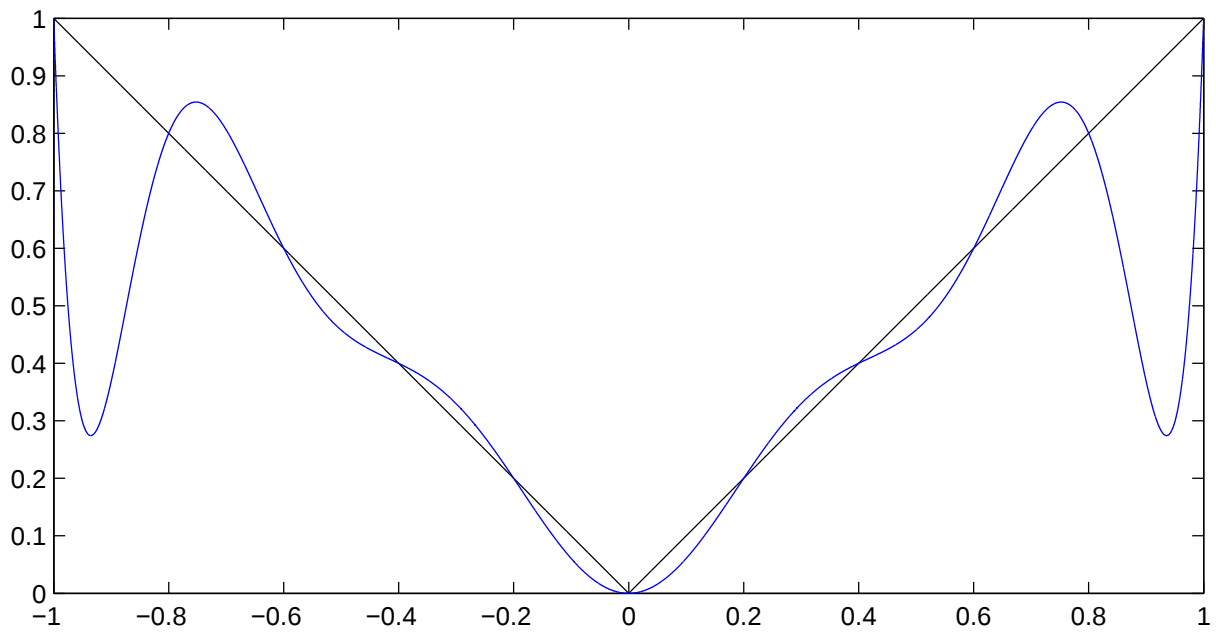
Hieraus folgt für das Differenzpolynom $p(y) := w(y) - q(y)$

$$p(y_j^{(e)}) = w(y_j^{(e)}) - q(y_j^{(e)}) \begin{cases} > 0, & \text{falls } j \text{ gerade} \\ < 0, & \text{falls } j \text{ ungerade, } j = 0, 1, \dots, n+1. \end{cases}$$

$p(y)$ hat also in $[-1, 1]$ $n+1$ Vorzeichenwechsel, also $n+1$ Nullstellen. Nun ist aber $p \in \Pi_n$, denn sowohl bei $w(y)$ als auch bei $q(y)$ hat y^{n+1} den Koeffizienten 1, also verschwindet y^{n+1} bei der Differenzbildung. Damit folgt aus Lemma 2.5, daß $p \equiv 0$, also $w(y) = q(y)$. Dies ist aber ein Widerspruch zur Annahme. ■

Um die Auswirkung der Wahl der Tschebyscheff-Nullstellen auf die Approximationsgenauigkeit des Interpolationsverfahrens zu demonstrieren, greifen wir nochmals das Beispiel der Betragsapproximation auf und stellen zum Vergleich die Ergebnisse der Interpolation mit äquidistanten- und Tschbeyscheff-Nullstellen nebeneinander.

Polynom-Interpolation des Betrags an $x_i = -1 + i \cdot 0.2$, $i=1:10$



Betragsapprox durch Polynom an 11 Tschebyscheff-Stellen

