Exercices avec indications

$$\textit{Calcul d'une primitive de } \frac{\ln x}{x^n} (\textit{pour } n > 1)$$

Indication : voir la fonction à intégrer sous la forme d'un produit $\frac{1}{x^n} \ln x$.

$$\textit{Calcul d'une primitive de } (x^2 + x + 1)e^x$$

Indication : C'est un produit, qui n'est pas de la forme $u'u^n$. On peut donc essayer d'intégrer par parties (il faudra le faire deux fois en fait).

$$\textit{Calcul de } I = \int_o^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \; dx$$

Indication : Utiliser $cos^2 x = 1 - sin^2 x$

$$\textit{Calcul de } I = \int_o^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2(x)}{\sin x + 2} \cos x \; dx$$

1. Effectuer le changement de variable $t = \sin x$ pour arriver à $\int_a^b f(t)dt$.
2. Décomposer la fraction $f(t)$ sous la forme $At + B + \dfrac{C}{t+2}$.
3. En déduire la valeur de I.

Remarque : Ce sont en fait les exercices 55b, 55d, 53c, 53d

$$\textit{Calcul d'une primitive de } \frac{2x^2 + 3}{1 + x^2} e^{2x + \arctan x}$$

Indication : On pourra poser $t = 2x + \arctan x$.

A ne lire qu'après avoir cherché les exercices

$$\int \frac{\ln x}{x^n} dx$$

On pose $u = \ln x$ (donc $u' = \frac{1}{x}$) et $v' = \frac{1}{x^n}$. On calcule $v = -\frac{1}{n-1}\frac{1}{x^{n-1}}$ (par exemple en utilisant qu'une primitive de x^m est $\frac{1}{m+1}x^{m+1}$, avec ici $m = -n$).

On écrit la formule d'intégrations par parties :

$$\begin{aligned}
\int \frac{\ln x}{x^n} dx &= \ln x.(-\frac{1}{n-1}\frac{1}{x^{n-1}}) - \int \frac{1}{x}(-\frac{1}{n-1}\frac{1}{x^{n-1}})dx \\
&= -\frac{\ln x}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int \frac{1}{x^n} dx \\
&= -\frac{\ln x}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{1}{(n-1)^2}\frac{1}{x^{n-1}} \\
&= -\frac{1}{x^{n-1}}(\frac{1}{(n-1)^2} + \frac{\ln x}{n-1})
\end{aligned}$$

Donc une primitive de $\dfrac{\ln x}{x^n}$ est $-\dfrac{1}{x^{n-1}}(\dfrac{1}{(n-1)^2} + \dfrac{\ln x}{n-1})$. On rappelle qu'une primitive est définie à une constante additive près.

$$\int (x^2 + x + 1)e^x dx$$

On choisit $u_1 = x^2 + x + 1$ (donc $u_1' = 2x + 1$) et $v_1' = e^x$ donc $v_1 = e^x$ (L'autre choix de u et v ferait apparaitre du x^3, ce qui n'arrangerait pas la situation).

Pour passer de la 1e à la 2e ligne, on refait une intégration par parties, avec $u_2 = 2x + 1$ et $v_2' = e^x$.

$$\begin{aligned}
\int (x^2 + x + 1)e^x dx &= (x^2 + x + 1)e^x - \int (2x + 1)e^x dx \\
&= (x^2 + x + 1)e^x - ((2x + 1)e^x - \int 2e^x dx) \\
&= (x^2 + x + 1)e^x - ((2x + 1)e^x - 2e^x) \\
&= (x^2 + x + 1 - 2x - 1 + 2)e^x \\
&= (x^2 - x + 2)e^x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_o^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\ dx &= \int_o^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)\cos x\ dx \\ &= \int_o^{\frac{\pi}{2}} \cos x\ dx - \int_o^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x\ dx \\ &= [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{3}[\sin^3 x]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 1 - 0 - \frac{1}{3}(1-0) \\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

Pour passer de la 2e à la 3e ligne, on reconnait un produit u^2u' dans la 2e intégrale à calculer . Sinon on peut faire le changement de variables $u = \sin x$ pour arriver au même résultat.

$$I = \int_o^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^2(x)}{\sin x + 2} \cos x\ dx$$

1. $I = \displaystyle\int_o^1 \frac{1-t^2}{t+2}\ dt$
2. On trouve $A = -1$, $B = +2$ et $C = -3$
3. Tous calculs faits, on trouve $I = \frac{3}{2} + 3\ln(\frac{2}{3})$.

$$\int \frac{2x^2+3}{1+x^2} e^{2x+\arctan x} dx$$

On pose $t = 2x + \arctan x$, d'où $dt = 2 + \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{3+2x^2}{1+x^2} dx$. En remplaant dans l'intégrale, on trouve :

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2+3}{1+x^2} e^{2x+\arctan x} dx &= \int e^t dt \\ &= e^t \\ &= e^{2x+\arctan x}\end{aligned}$$

Ne pas oublier de revenir à une fonction en x à la fin. On aurait pu directement voir que la fonction sous l'intégrale était de la forme $u'e^u$ (certes, ce n'était pas facile du tout).