Prof. Dr. M. Hinze
Dr. S. Heitmann SS 2006

Übungen zur Vorlesung „Numerische Mathematik für Studierende der Wirtschaftsmathematik, der Lehrämter und der Naturwissenschaften“

Blatt 9

Abgabetermin: Aufgaben 1–3: 20.6.2006, Aufgabe 4: 27.6.2006

Aufgabe 1: (8 (3+1+4) Punkte) Es sei $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär, und es seien $U, V \in \mathbb{R}^{n\times m}$, wobei $m \le n$ gelte.

a) Beweisen Sie folgende Aussage: $B + UV^T$ ist genau dann regulär, wenn $I + V^T B^{-1} U$ regulär ist, und in diesem Fall hat die Sherman–Morrison-Woodbury Formel

$$\big(B + UV^T\big)^{-1} = B^{-1} - B^{-1}U\big(I + V^T B^{-1} U\big)^{-1} V^T B^{-1}$$

Gültigkeit.

b) Bestimmen Sie unter Verwendung von $B = I$ und geeigneter Matrizen U, V mit Hilfe der Sherman–Morrison–Woodbury Formel die Inverse von

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$.

c) Geben Sie einen Algorithmus an zur numerischen Berechnung interpolierender periodischer kubischer Splines, welcher nur die numerische Lösung tridiagonaler linearer Gleichungssysteme erfordert.

Aufgabe 2: (6 (4+2) Punkte) Gegeben ist die Randwertaufgabe [$\mu \ge 0$]

$$-u''(x) + \mu u(x) = f(x) \quad \text{für } x \in [0,1] \qquad \text{und} \qquad u(0) = u(1) = 0.$$

Über die schwache Formulierung und nach Diskretisierung des Funktionenraums erhält man die Aufgabe:
Gesucht $u_h \in V_h$ mit

$$\int_0^1 u_h'(x)v'(x)\,dx + \mu \int_0^1 u_h(x)v(x)\,dx = \int_0^1 f(x)v(x)\,dx \qquad \text{für alle } v \in V_h \qquad (1)$$

mit einem geeigneten Raum V_h.

Gegeben sei nun eine Zerlegung $\Delta : 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1} = 1$ des Intervalls $[0,1]$ und sei $V_h = \operatorname{span}\{b_i, i = 1, ..., n\}$ mit

$$b_j(x) = \begin{cases} \dfrac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j} & \text{falls } x \in [x_j, x_{j+1}) \\ \dfrac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} & \text{falls } x \in (x_{j-1}, x_j) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Wie lautet das lineare Gleichungssystem, wenn (1) für alle $v = b_j, j = 1, ..., n$ gefordert und für u_h der Ansatz

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i b_i(x)$$

verwendet wird.

(b) Welche Eigenschaften hat die Koeffizientenmatrix dieses Systems.

Aufgabe 3: (10 (2+2+2+4) Punkte) Gegeben sind die Daten

x	0	1	2	3	4
y	0	3	1	-1	0

einer Funktion $y = f(x)$.
Bestimmen Sie jeweils den kubischen interpolierenden Spline $S_\Delta(x)$ mit

a) natürlichen Randbedingungen,

b) periodischen Randbedingungen (Periode T=4) und

c) *not-a-knot* Bedingungen (de Boor Spline).
Die *not-a-knot* Bedingungen lauten:
$\lim\limits_{x \nearrow x_1} S_\Delta'''(x) = \lim\limits_{x \searrow x_1} S_\Delta'''(x)$ und $\lim\limits_{x \nearrow x_n} S_\Delta'''(x) = \lim\limits_{x \searrow x_n} S_\Delta'''(x)$.
D. h., bei x_1 und x_n ist auch die dritte Ableitung von S_Δ stetig. Damit ist S_Δ auf $[x_0, x_1]$ und $[x_1, x_2]$ sowie auf $[x_{n-1}, x_n]$ und $[x_n, x_{n+1}]$ identisch. Folglich sind x_1 und x_n eigentlich *keine Knoten*.

Zu jeder Spline-Funktion sind das zu lösende lineare Gleichungssystem zur Bestimmung der Momenten $M_0, \ldots, M_{n+1}$, die Momenten sowie die Koeffizienten $A_1, \ldots, A_{n+1}$ und $B_1, \ldots, B_{n+1}$ anzugeben.

d)* Berechnen Sie die *Gesamtkrümmung* $K_p = \int\limits_{x_0}^{x_{n+1}} p''(x)^2\,dx$ des Interpolationspolynoms p und die *Gesamtkrümmung* $K_s = \int\limits_{x_0}^{x_{n+1}} S_\Delta''(x)^2\,dx$ des kubischen interpolierenden Splines S_Δ mit natürlichen Randbedingungen. Welche Eigenschaft des kubischen interpolierenden Splines wird dadurch bestätigt?

Aufgabe 4: (15 Punkte) Erweitern Sie Ihr Interpolationsprogramm aus Aufgabe 5, Blatt 7 um die Berechnung kubischer, interpolierender Splines (natürliche, periodische, Hermite und De Boor Splines) und testen Sie es an den dort vorgegebenen Daten.