Prof. Dr. M. Hinze
Dr. S. Heitmann SS 2006

Übungen zur Vorlesung „Numerische Mathematik für Studierende der Wirtschaftsmathematik, der Lehrämter und der Naturwissenschaften“
Blatt 8
Abgabetermin: 13.6.2006

Aufgabe 1: (4 Punkte) Für den Interpolationsfehler einer beliebig glatten Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ gilt nach Satz 4.14 aus dem Skript die Abschätzung

$$\|f-p\|_\infty := \max_{x\in[a,b]} |f(x)-p(x)| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty (b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Dabei interpoliert p die Funktion f in den Knoten $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$, d.h. es gilt $p(x_i) = f(x_i)$ für $i = 0, 1, ..., n$. Bestimmen Sie die rechte Seite dieser Abschätzung für $f(x) = \sin(x)$ und $[a,b] = [0,\pi]$. Was lässt sich daraus für $n \to \infty$ schlussfolgern ?

Aufgabe 2: (4 Punkte) Seien $[a,b] \subset \mathbb{R}$ und $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$ vorgegeben. Bezeichne $p_f \in \Pi_n$ das Interpolationspolynom zur Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und den Knoten $x_0, \ldots, x_n$. Geben Sie zu jedem $C > 0$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion f an, so dass der maximale Interpolationsfehler

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - p_f(x)|$$

größer als C ist.

Aufgabe 3: (10 (2+2+2+4) Punkte) Gegeben sind die Daten

x	0	1	2	3	4
y	0	3	1	-1	0

einer Funktion $y = f(x)$.
Bestimmen Sie jeweils den kubischen interpolierenden Spline $S_\Delta(x)$ mit

a) natürlichen Randbedingungen,

b) periodischen Randbedingungen (Periode T=4) und

c) *not-a-knot* Bedingungen (de Boor Spline).
Die *not-a-knot* Bedingungen lauten:
$\lim_{x\nearrow x_1} S'''_\Delta(x) = \lim_{x\searrow x_1} S'''_\Delta(x)$ und $\lim_{x\nearrow x_n} S'''_\Delta(x) = \lim_{x\searrow x_n} S'''_\Delta(x)$.
D. h., bei x_1 und x_n ist auch die dritte Ableitung von S_Δ stetig. Damit ist S_Δ auf $[x_0,x_1]$ und $[x_1,x_2]$ sowie auf $[x_{n-1},x_n]$ und $[x_n,x_{n+1}]$ identisch. Folglich sind x_1 und x_n eigentlich *keine Knoten*.

Zu jeder Spline-Funktion sind das zu lösende lineare Gleichungssystem zur Bestimmung der Momenten $M_0, \ldots, M_{n+1}$, die Momenten sowie die Koeffizienten $A_1, \ldots, A_{n+1}$ und $B_1, \ldots, B_{n+1}$ anzugeben.

d)* Berechnen Sie die *Gesamtkrümmung* $K_p = \int\limits_{x_0}^{x_{n+1}} p''(x)^2 \, dx$ des Interpolationspolynoms p und die *Gesamtkrümmung* $K_s = \int\limits_{x_0}^{x_{n+1}} S''_\Delta(x)^2 \, dx$ des kubischen interpolierenden Splines S_Δ mit natürlichen Randbedingungen. Welche Eigenschaft des kubischen interpolierenden Splines wird dadurch bestätigt?

Jetzt aber wünschen wir schöne Pfingstferien