Prof. Dr. M. Hinze
Dr. S. Heitmann SS 2006

Übungen zur Vorlesung „Numerische Mathematik für Studierende der Wirtschaftsmathematik, der Lehrämter und der Naturwissenschaften“
Blatt 7
Abgabetermin: Aufgaben 1–3: 30.5.2006, Aufgaben 4–5: 13.6.2006

Aufgabe 1: (7 (3+2+2) Punkte)

a.) Hat das Polynom $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, x^i$ mit $a_n = 1$ eine Nullstelle x^*, d.h. $p(x^*) = 0$, so gilt

$$|x^*| \;\leq\; \max_{i=1,\ldots,n-1} \left(|a_0|,\; 1 + |a_i|\right).$$

Weisen Sie das nach.

b.) Verwenden Sie das Schema von Neville, um den Wert $p(2)$ des Interpolationspolynoms $p \in \Pi_3$ zu den Punkten $(0,2), (1,1), (3,2)$ und $(4,4)$ zu berechnen.

c.) Verwenden Sie dividierte Differenzen, um für die Interpolationsaufgabe aus b.) das Newton-Interpolationspolynom zu berechnen.

Aufgabe 2: (4 Punkte) Seien x_i, $i = 1, ..., n,$ gegebene reelle Zahlen.

Berechnen Sie die Determinante der VANDERMONDEschen Matrix

$$V(x_0, x_1, ..., x_n) := \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & ... & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & ... & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & ... & x_n^n \end{pmatrix}$$

und begründen Sie, warum sich damit zeigen lässt, dass die Polynominterpolation mit $(n+1)$ paarweise verschiedenen Stützstellen für Polynome n-ten Grades im $\mathbb{R}^1$ immer eindeutig lösbar ist.

Aufgabe 3: (4 Punkte) Beweisen Sie, dass die zu paarweise verschiedenen Stützstellen $x_0, \ldots, x_n$ und zugehörigen Stützwerten $f_0, \ldots, f_n$ gebildeten dividierten Differenzen die explizite Darstellung

$$f[x_k, \ldots, x_{k+j}] = \sum_{i=k}^{k+j} \frac{f(x_i)}{\prod\limits_{\substack{m=k \\ m \neq i}}^{k+j} (x_i - x_m)}, \quad k = 0, \ldots, n-j,\ j = 1, \ldots, n,$$

besitzen.

Aufgabe 4: (10 (2+2+2+2+2) Punkte) (**Hermite Interpolation**)
Die Aufgabenstellung der **Hermite Interpolation** lautet: Zu paarweise verschiedenen Knoten $x_j (0 \leq j \leq n)$ und Werten $f_j, f_j' \in \mathbb{R}$, finde ein Polynom $p \in \Pi_{2n+1}$ mit den Eigenschaften

$$p(x_j) = f_j \text{ und } p'(x_j) = f_j' \text{ für } 0 \leq j \leq n.$$

Es soll nun u.a. nachgewiesen werden, dass dieses Problem eine eindeutige Lösung besitzt.

a.) Zeigen Sie zum Nachweis der Eindeutigkeit, dass das Polynom

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} (1 - 2L_k'(x_k)(x - x_k)) L_k^2(x) f_k + \sum_{k=0}^{n} (x - x_k) L_k^2(x) f_k'$$

die Interpolationsaufgabe löst, wobei L_k das k-te Lagrange-Polynom zu den Knoten $x_0, \dots, x_n$ bezeichnet.

b.) Betrachten Sie die Differenz zweier Lösungen des Problems und begründen Sie, dass diese identisch verschwindet.

c.) Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Weisen Sie nach, daß für $x, y \in (a,b)$, $x \neq y$ die dividierte Differenz $f[x,y] = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$

$$f'(x) = \lim_{x \neq y \to x} f[x,y]$$

erfüllt. Es ist daher naheliegend, $f[x_j, x_j] := f_j'$ zu definieren. Man kann nun zeigen (nicht verlangt), dass das obige Hermite-Interpolationsproblem durch das Polynom

$$\begin{aligned} p(x) = f[x_0] + f[x_0,x_0](x-x_0) + f[x_0,x_0,x_1](x-x_0)^2 + \\ + f[x_0,x_0,x_1,x_1](x-x_0)^2(x-x_1) + f[x_0,x_0,x_1,x_1,x_2](x-x_0)^2(x-x_1)^2 + \\ + \dots + f[x_0,x_0,\dots,x_n,x_n](x-x_0)^2 \dots (x-x_{n-1})^2(x-x_n) \end{aligned}$$

gelöst wird, wobei sich die dividierten Differenzen nach folgendem Schema (mit der üblichen Formel) berechnen lassen (hier für n = 1):

Schema der dividierten Differenzen für Hermite Interpolation(hier für $n = 1$)

x	$f[\ ]$		$f[\ ,\ ]$		$f[\ ,\ ,\ ]$		$f[\ ,\ ,\ ,\ ]$
x_0	f_0	$\searrow$					
			$f[x_0,x_0] = f_0'$	$\searrow$			
x_0	f_0	$\nearrow \searrow$			$f[x_0,x_0,x_1]$	$\searrow$	
			$f[x_0,x_1]$	$\nearrow \searrow$			$f[x_0,x_0,x_1,x_1]$
x_1	f_1	$\nearrow \searrow$			$f[x_0,x_1,x_1]$	$\nearrow$	
			$f[x_1,x_1] = f_1'$	$\nearrow$			
x_1	f_1	$\nearrow$					

d.) Berechnen Sie für $n = 1$ mit Hilfe dieses Schemas die Newton-Koeffizienten $f[x_0], f[x_0, x_0], \ldots,$ des Hermite-Interpolationspolynoms p in der obigen Newton-Darstellung explizit in Abhängigkeit von f_0, f_1, f_0', f_1' und $h_0 = x_1 - x_0$.

e.) Bestimmen Sie für das Polynom aus d.) die Koeffizienten a, b, c, d für die Darstellung

$$p(x) = a + b(x - x_0) + c(x - x_0)^2 + d(x - x_0)^3.$$

Aufgabe 5: (10 (6+2+2) Punkte) Gegeben seien paarweise verschiedene Stützstellen $\{x_i\}_{i=0}^n$ und die zugehörigen Stützwerte $\{y_i\}_{i=0}^n$, $y_i = f(x_i)$.

a) Schreiben Sie Programme

(i) zur Berechnung der Koeffizienten $c_j = f_{[x_0,\ldots,x_j]}$ der Newtonschen Form

$$p_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + \cdots + c_n(x - x_0) \cdot \cdots \cdot (x - x_{n-1})$$

des Interpolationspolynoms,
$\Big[$ Input: $\{x_i, y_i\}_{i=0}^n$, Output: $\{c_j\}_{j=0}^n \Big]$ und

(ii) zur Berechnung des Funktionswertes $y = p_n(x)$ des Interpolationspolynoms an der Stelle x
$\Big[$ Input: x, $\{x_i, c_i\}_{i=0}^n$, Output: $y = p_n(x) \Big]$ sowie

(iii) zur Darstellung der Graphen von f und p_n, wobei die Punkte $(x, f(x))$ und $(x, p_n(x))$ markiert werden sollen.

b) Testen Sie die Programme für die durch $f(x) = e^x$ und $f(x) = \dfrac{1}{1 + 25x^2}$ gegebenen Stützwerte $y_i = f(x_i)$ mit gleichabständigen Stützstellen $x_i = -1 + ih$ $(i = 0, \ldots, n), h = 2/n$, auf dem Intervall $[-1, 1]$ für n=4,6,8,16.

c) Überprüfen Sie die Robustheit der Implementierung mit den Daten $\{x_0, x_1, x_2\} = \{0, 0, 1\}$ und $\{y_0, y_1, y_2\} = \{1, 2, 3\}$.