Prof. Dr. M. Hinze
Dr. S. Heitmann SS 2006

Übungen zur Vorlesung „Numerische Mathematik für Studierende der Wirtschaftsmathematik, der Lehrämter und der Naturwissenschaften"
Blatt 6
Abgabetermin: Aufgaben 1–3: 23.5.2006 Aufgabe 4: 29.5.2006

Aufgabe 1: (4 Punkte) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2 mal stetig differenzierbar. Konstruieren Sie das **Newton-Raphson Verfahren 2ten Grades** zur numerischen Berechnung von Nullstellen einer Funktion f, welches durch die Iterationsfunktion

$$G(x) := x - \frac{2f(x)}{f'(x) + \operatorname{sgn}(f'(x))\sqrt{f'(x)^2 - 2f(x)f''(x)}} \tag{1}$$

gegeben ist. Leiten Sie dazu die Iterationsfunktion G her und begründen Sie die Durchführbarkeit des Verfahrens in der Umgebung einer einfachen Nullstelle.

Hinweis: Leiten Sie zuerst die Iterationsfunktion

$$\tilde{G}(x) := x - \frac{f'(x) - \operatorname{sgn}(f'(x))\sqrt{f'(x)^2 - 2f(x)f''(x)}}{f''(x)}$$

her. Verwenden Sie dabei anstelle des linearen Modells (wie beim Newton-Verfahren) ein quadratisches Modell für f.

Aufgabe 2: (4 Punkte) Zeigen Sie, dass das Newton–Raphson Verfahren mit der Iterationsfunktion aus (1) in der Umgebung einfacher Nullstellen mindestens ein Verfahren der Ordnung $p = 3$ darstellt, falls f genügend glatt ist (d.m. f sei so häufig stetig differenzierbar wie im Beweis benötigt).

Aufgabe 3: (8 Punkte (2+2+2+2)) Betrachten Sie das vereinfachte Newton-Verfahren

$$x^0 = \tilde{x}, \quad x^{i+1} = G(x^i) = x^i - F'(\tilde{x})^{-1}F(x^i),\ i = i+1$$

mit gegebener Funktion F, die folgende Eigenschaften hat:
$F : U \to \mathbb{R}^n$ ist stetig differenzierbar auf der offenen Umgebung U von $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$. Dazu ist $F'(x)$ Lipschitz-stetig auf U mit Konstante $L > 0$,

$$||F'(x) - F'(y)||_2 \leq L||x-y||_2 \quad \text{für alle } x, y \in U$$

und $F'(\tilde{x})$ invertierbar.
a) Begründen Sie, dass für $\delta := (2L||F'(\tilde{x})^{-1}||_2)^{-1} > 0$ gilt:

$$||G'(x)||_2 \leq \frac{1}{2} \quad \text{für alle } x \in K(\delta),$$

wobei $K(\delta) := \{y \in \mathbb{R}^n : ||y - \tilde{x}||_2 \leq \delta\}$.
b) Folgern Sie

$$||G(x) - G(y)||_2 \leq \frac{1}{2}||x-y||_2 \quad \text{für alle } x, y \in K(\delta).$$

c) Sei ab jetzt (auch für Teil d)) $F(\tilde{x})$ hinreichend klein, d.h.,

$$4L||F'(\tilde{x})^{-1}||_2 \, ||F'(\tilde{x})^{-1}F(\tilde{x})||_2 \leq 1.$$

Zeigen Sie, dass dann folgt:

$$||G(x) - \tilde{x}||_2 \leq \delta \quad \text{für alle } x \in K(\delta).$$

d) Folgern Sie, dass G auf $K(\delta)$ genau einen Fixpunkt ξ besitzt, und dass die Folge $\{x^i\}$ gegen ξ konvergiert. Zeigen Sie weiter, dass ξ die eindeutige Lösung der Gleichung $F(x) = 0$ auf $K(\delta)$ ist.

Aufgabe 4: (4 Punkte) Programmieren Sie das Newton Verfahren. Testen Sie Ihr Programm an der nichtlinearen Gleichung

$$F(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 - 5 \\ x_2^3 - x_1 \end{pmatrix}$$

mit dem Startvektor $x^0 = (2, 1)^t$, oder, falls Sie noch keine Funktonalmatrizen kennen, an der nichtlinearen, skalaren Gleichung

$$f(x) = \cos(x) \cdot \cosh(x) + 1 = 0$$

und dem Startwert $x^0 = 1.88$. Brechen Sie die Iteration ab, falls $|F(x^i)| \leq 10^{-9}$. Vergleichen Sie das Verfahren mit dem vereinfachten Newton-Verfahren aus Aufgabe 3.