Prof. Dr. M. Hinze
Dr. S. Heitmann SS 2006

Übungen zur Vorlesung „Numerische Mathematik für Studierende der Wirtschaftsmathematik, der Lehrämter und der Naturwissenschaften“
Blatt 5
Abgabetermin: 16.5.2006

Aufgabe 1: (4 Punkte (2+2)) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

a) exakt mit Hilfe des CG–Verfahrens, sowie

b) näherungsweise durch 4 Schritte des Gauß–Seidel Verfahrens (jeweils mit demselben Startwert).

Diskutieren Sie kurz die Resultate.

Aufgabe 2: (5 Punkte (2+3(1+1+1)) Ermitteln Sie an Hand einer Skizze die Anzahl der Lösungen der Gleichung

$$x^2 - \ln(x) - 2 = 0 \tag{1}$$

und Näherungswerte für die Lösungen.

Untersuchen Sie, welche der nachfolgenden Funktionen G_i eine gegen eine Lösung von (1) konvergente Folge gemäß $x^{i+1} = G_k(x^i),\ i = 0, 1, \ldots,$ für beliebiges $x^0 \in \mathbb{R}^1$ erzeugen werden:

(a) $G_1(x) := x^2 + x - \ln(x) - 2\,;$

(b) $G_2(x) := \sqrt{\ln(x) + 2}\,;$

(c) $G_3(x) := e^{x^2-2}.$

Aufgabe 3: (6 Punkte (2+2+2)) a) Betrachten Sie die Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$. Diese sei zweimal stetig differenzierbar und besitze einen Fixpunkt $\xi \in (a, b)$. Außerdem sei

$$F'(\xi) \geq 0, \quad F'(b) \leq 1, \quad F''(x) > 0 \quad \text{für alle } x \in (\xi, b).$$

Weisen Sie nach, dass die Iterierten Folge $\{x^i\}_{i\in\mathbb{N}}$ der Fixpunkt-Iteration

$$x^0 \in [\xi, b] \text{ gegeben, } x^{i+1} = F(x^i),\ i = i + 1$$

monoton gegen ξ konvergiert.
b) Betrachten Sie die Funktion $G : [a, b] \to \mathbb{R}$. Diese sei zweimal stetig differenzierbar und besitze eine Nullstelle $\xi \in (a, b)$. Außerdem sei

$$G'(\xi) \geq 0, \quad G''(x) > 0 \quad \text{für alle } x \in (\xi, b).$$

Weisen Sie nach, dass die Folge $\{x^i\}_{i\in\mathbb{N}}$ der Newton-Iteration

$$x^0 \in (\xi, b] \text{ gegeben, } x^{i+1} := x^i - \frac{F(x^i)}{F'(x^i)},\ i = i+1$$

wohldefiniert ist und monoton gegen ξ konvergiert.
c) Geben Sie eine Funktion $F(x)$ an, für die die Voraussetzungen aus b) erfüllt sind, für die die Folge der Newton-Iterierten $\{x^i\}_{i\in\mathbb{N}}$ aber nur linear gegen die Nullstelle ξ konvergiert, d.h.,

$$\begin{aligned} |x^{i+1} - \xi| &\leq C_2|x^i - \xi|, \\ \text{aber } |x^{i+1} - \xi| &\geq C_1|x^i - \xi| \end{aligned}$$

mit Konstanten $C_1, C_2 \in (0,1)$ und $C_1 \leq C_2$.

Aufgabe 4: (4 Punkte) Die Funktion $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ besitze einen Fixpunkt ξ (d.h. ξ erfüllt $G(\xi) = \xi$) und sei in einer Umgebung $B_r(\xi) := \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - \xi\| < r\}$ von ξ kontrahierend mit Konstante K (d.h. es gilt dort $\|G(x) - G(y)\| \leq K\|x - y\|$ für alle $x, y \in B_r(\xi)$ mit einer Konstanten $K < 1$). Dann besitzt die Iterierten Folge $\{x^i\}_{i\in\mathbb{N}}$ der Fixpunkt-Iteration

$$x^0 \in \mathbb{R}^n \text{ gegeben, } x^{i+1} = G(x^i),\ i = i+1$$

für jeden Startwert $x^0 \in B_r(\xi)$ die Eigenschaften

a) $x^i \in B_r(\xi)$ für alle $i \in \mathbb{N}$

b) $\|x^i - \xi\| \leq K^i \|x^0 - \xi\|$ (was bedeutet, dass $\{x^i\}_{i\in\mathbb{N}}$ mindestens linear gegen ξ konvergiert).

Beweisen Sie diesen Satz.