Prof. Dr. M. Hinze
Dr. S. Heitmann SS 2006

Übungen zur Vorlesung „Numerische Mathematik für Studierende der Wirtschaftsmathematik, der Lehrämter und der Naturwissenschaften“

Blatt 4

Abgabetermin: Aufgaben 1–3: 09.05.2006, Aufgabe 4: 16.5.2006

Definitionen: Eine Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ heißt

diagonaldominant, falls $|a_{ii}| \geq \sum_{j\neq i} |a_{ij}| \quad$ für $i = 1, \ldots, n$,

strikt diagonaldominant, falls $|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}| \quad$ für $i = 1, \ldots, n$,

irreduzibel, falls der Graph $G(A) = (V, D)$ der Matrix A stark zusammenhängend ist und

irreduzibel diagonaldominant, falls $|a_{ii}| \geq \sum_{j\neq i} |a_{ij}| \quad$ für $i = 1, \ldots, n$, $|a_{ll}| > \sum_{j\neq l} |a_{lj}|$ für ein $l \in \{1, \ldots, n\}$ und der Graph $G(A) = (V, D)$ stark zusammenhängend ist.

Dabei besteht der **(gerichtete) Graph** $G(A) = (V, D)$ einer Matrix A aus den Knoten $V = \{P_1, \ldots, P_n\}$ und den gerichteten Kanten $\overline{P_i P_j}$ mit $a_{ij} \neq 0$.

Ein Graph $G(A) = (V, D)$ ist **stark zusammenhängend** wenn es für $V = \{P_1, \ldots, P_n\}$ zu jedem Knotenpaar P_i, P_j einen gerichteten Weg (aus u.u. mehreren Kanten) von P_i nach P_j gibt, wobei Kanten $\overline{P_i P_j} \in D \Leftrightarrow a_{ij} \neq 0$.

Aufgabe 1: (8 Punkte (1+1+2+2+2))

a) Skizzieren Sie $G(A)$ für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ist A irreduzibel?

b) Zeigen Sie, dass Tridiagonalmatrixen mit nichtverschwindenden Einträgen irreduzibel sind.

c) Sei D (n,n)-Diagonalmatrix. Zeigen Sie, dass mit $B \in \mathbb{R}^{n,n}$ irreduzibel auch $B + D \in \mathbb{R}^{n,n}$ irreduzibel ist.

d) Zeigen Sie, dass strikt diagonaldominante Matrizen regulär sind.

e) Zeigen Sie, dass irreduzibel diagonaldominante Matrizen regulär sind.

Aufgabe 2: (7 Punkte (3+2+2)

a) Sei

$$B := \begin{bmatrix} \beta & \gamma & & \\ \alpha & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \gamma \\ & & \alpha & \beta \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

mit $\alpha \cdot \gamma > 0$. Weisen Sie nach, dass B die Eigenwerte

$$\lambda_i = \beta + 2\sqrt{\alpha\gamma}\ \mathsf{sign}(\alpha)\cos(\frac{i\pi}{n+1}),\ 1 \leq i \leq n$$

und die Eigenvektoren v^i mit den Komponenten

$$v^i_j = (\frac{\alpha}{\gamma})^{\frac{j-1}{2}} \sin(\frac{ij\pi}{n+1}),\ 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$$

besitzt. Schätzen Sie die Kondition von B bezgl. der Euklidischen Norm für den Fall

$$\beta = \frac{2}{h^2},\quad \alpha = \gamma = -\frac{1}{h^2},\quad (0 < h \ll 1)$$

in Termen von h ab. Dabei gilt $h = \frac{1}{n+1}$.

b) Geben Sie sowohl notwendige als auch hinreichende Bedingungen an dafür, dass das Jacobi Verfahren für B konvergiert.

c) Konstruieren Sie eine positiv definite (3×3) Matrix, für welche das Gesamtschritt Verfahren nicht konvergiert.

Aufgabe 3: (4 Punkte (2+2)+4 Zusatzpunkte) Bezeichne

$$L_h = \begin{bmatrix} d_1 & r_1 & & \\ l_2 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & r_{n-1} \\ & & l_n & d_n \end{bmatrix}$$

eine Tridiagonalmatrix mit den Einträgen $d_i = \frac{2}{h^2} + c_i$, $r_i = -\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2h}b_i$, $l_i = -\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h}b_i$, $i = 1, \dots, n$.

Zeigen Sie:

a) $b_i \equiv 0$ und $c_i \geq 0, \forall i$ impliziert, dass L_h regulär ist.

b) $0 < h < \frac{2}{|b_i|}$ und $c_i \geq 0 \,\forall i$ impliziert, dass L_h regulär ist.

c)* Geben Sie hinreichende Bedingungen dafür an, dass Jacobi und Gauß–Seidel Verfahren für L_h konvergieren.

Aufgabe 4: (8 Punkte (6+2)+4 Zusatzpunkte) Berechnen Sie numerische Approximationen für die Lösungen der Randwertaufgabe

$$-\epsilon y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = f(x) \quad x \in (0,1), \quad y(0) = \alpha,\, y(1) = \beta$$

für die Daten

(a) $\epsilon = 1,\, b \equiv 1,\, c \equiv 0,\, \alpha = \beta = 0,\, f(x) = -3x^2 + 6x + 1$

(b) $\epsilon = 10^{-p},\, b \equiv -1,\, c \equiv 0,\, \alpha = 0,\, \beta = 1,\, f(x) \equiv 0$, testen Sie $p = 1, 2, 3$

Diskretisieren Sie dabei y'' wie üblich mit dem zentralen Differenzenquotienten für die 2. Ableitung und

i) y' mit zentraler Differenz bei (a) und (b),

ii) y' mit Rückwärts–Differenz bei (a), bzw. Vorwärts–Differenz bei (b)

und erklären Sie die numerischen Resultate.

Gehen Sie dabei vor wie in der Vorlesung und im Skript beschrieben. Lösen Sie das resultierende lineare Gleichungssystem $L_h x = b$ (L_h NICHT mit jenem aus Aufgabe 3 identisch!) jeweils mit den Jacobi- und dem Gauß-Seidel-Verfahren für $n = 10, 50, 100$ ($h = \frac{1}{n+1}$) und brechen Sie die Iterationen ab, falls die Iterierten x^m die Bedingungen

- $\|r^m\| = \|b - L_h x^m\| \le \delta \|r^0\|$, oder
- $\|x^{m+1} - x^m\| \le (1 - \rho_m)\delta \|x^m\|$

mit $\delta = 10^{-3}$ bzw. $= 10^{-6}$ erfüllen. Dabei ist

$$\rho_m = \frac{\|x^{m+1} - x^m\|}{\|x^m - x^{m-1}\|} \approx \rho(M) \text{ für große } m \in \mathbb{N}$$

eine Näherung des Spektralradius, siehe Schwetlick/Kretzschmar. Stellen Sie die Lösung graphisch dar und plotten Sie den Fehler zur exakten Lösung jeweils für beide Abbruchbedingungen. Dokumentieren Sie die Abhängigkeit der Anzahl der benötigten Iterationen von der Diskretisierungsfeinheit $h = \frac{1}{n+1}$. Die exakten Lösungen lauten

(a) $y(x) = x(1-x)(1+x)$ für den Fall (a),

(b) und $y(x) = (1 - e^{-\frac{x}{\epsilon}})/(1 - e^{-\frac{1}{\epsilon}})$ im Fall (b). Vergleichen Sie dazu auch das Kapitel 7.1.1 im Buch "Numerik partieller Differentialgleichungen" von Ch. Großmann und H-G. Roos, Teubner 1992.

Weisen Sie nach, dass die angegebenen Lösungen tatsächlich Lösung der Differentialgleichung sind.

Zusatzaufgabe: Benutzen Sie zur numerischen Lösung auch die gedämpften/relaxierten Verfahren. Welche Parameter ω eignen sich am besten?