

**Übungen zur Vorlesung „Numerische Mathematik für Studierende der
Wirtschaftsmathematik, der Lehramter und der Naturwissenschaften“**

Blatt 3

Abgabetermin: 02.05.2006

Aufgabe 1: (4 Punkte (1+1+2)) Sei $A \in M(n; \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass folgende Beziehungen gelten:

$$\|A\|_{\infty} := \text{lub}_{\infty}(A) = \max_{x \neq 0} \frac{|Ax|_{\infty}}{|x|_{\infty}} = \max_{1 \leq k \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{kj}|,$$

$$\|A\|_1 := \text{lub}_1(A) = \max_{x \neq 0} \frac{|Ax|_1}{|x|_1} = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{k=1}^n |a_{kj}|,$$

$$\|A\|_2 := \text{lub}_2(A) = \max_{x \neq 0} \frac{|Ax|_2}{|x|_2} = \max_i \left\{ \sqrt{\lambda_i}; \lambda \text{ Eigenwert von } A^T A \right\}.$$

Aufgabe 2: (4 Punkte (2+2)) Sei $F \in M(n; \mathbb{R})$ mit $\|F\| < 1$, wobei $\|\cdot\|$ eine **submultiplikative** Matrix-Norm bezeichne, für die $\|E\| = 1$ gilt.

a) Weisen Sie nach, dass dann $(E + F)^{-1}$ existiert und die Abschätzung

$$\|(E + F)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|F\|}$$

richtig ist.

b) Wenden Sie dieses Resultat auf $(A + \delta A)$ an, d.h. formulieren Sie hinreichende Kriterien für die Existenz von $(A + \delta A)^{-1}$ und geben Sie eine Abschätzung der Norm $\|(A + \delta A)^{-1}\|$ an.

Aufgabe 3: (4 Punkte) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$Ax = b,$$

wobei $A = \begin{pmatrix} 4.1 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{pmatrix}$ und $b = (4.1, 9.7)^T$. Lösen Sie das gleiche System mit minimal veränderter rechter Seite $b = (4.11, 9.70)^T$.

Berechnen und diskutieren Sie die relativen Änderungen in b und der Lösung x in der l_1 -Norm. Welche Rolle spielt dabei die Konditionszahl?

Aufgabe 4: (4 Punkte) Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem

$$Ax = b$$

mit invertierbarer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und Vektoren $x, b \in \mathbb{R}^n$. Weiter sei $\varepsilon > 0$. Wir betrachten den folgenden Algorithmus:

1. Berechne eine Näherungslösung $\tilde{x}$ von $Ax = b$ mit $\|A\tilde{x} - b\| \leq \varepsilon \|b\|$.
2. Berechne das Residuum $r = b - A\tilde{x}$ (exakt bzw. mit sehr hoher Genauigkeit).
3. Berechne eine Näherungslösung $\tilde{s}$ von $As = r$ mit $\|A\tilde{s} - r\| \leq \varepsilon \|r\|$.
4. Setze $x^* = \tilde{x} + \tilde{s}$.

Die Schritte 2-4 werden **Nachiteration** genannt. Zeigen Sie, dass für die nachiterierte Lösung x^* folgende Abschätzung gilt:

$$\|Ax^* - b\| \leq \varepsilon^2 \|b\|$$