Prof. Dr. M. Hinze
Dr. S. Heitmann SS 2006

Übungen zur Vorlesung

„Numerische Mathematik für Studierende der Wirtschaftsmathematik, der Lehrämter und der Naturwissenschaften“

Blatt 2

Abgabetermin: 25.04.2006

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Sei F die Frobeniusmatrix

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & f_{j+1,j} & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & f_{n,j} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie F^{-1} an.

Aufgabe 2 (4 Punkte (2+2))

- Zeigen Sie dass, der Gauß'sche Algorithmus angewendet auf eine Bandmatrix der Bandbreite m Matrizen R mit einer Bandbreite $\leq 2m$ und L mit höchstens $m+1$ Nicht-Null Elementen pro Spalte liefert (ink. der Diagonalen). Dabei ist die Bandbreite einer Matrix $A = (a_{ij})$ gleich m, falls für alle $|i-j| > m$ schon $a_{ij} = 0$ erfüllt ist.
- Sei eine A symmetrische, positiv definite Bandmatrix mit der Bandbreite m. Dann hat der Cholesky-Faktor L die Bandbreite m (das sollen Sie nachweisen!).

Aufgabe 3 (4 Punkte (2+2))

- Weisen Sie nach:

  Für die Einträge l_{ij} der Cholesky-Zerlegung L einer symmetrischen, positiv definiten Matrix A gilt

$$|l_{ij}| \leq \sqrt{a_{ii}}, \quad 1 \leq j \leq i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

- Schätzen Sie die maximale Größe der Matrixeinträge des Faktors R bei Durchführung der LR-Zerlegung der Matrix A mit partieller Pivotisierung ab. Zeigen Sie

$$|r_{km}| \leq \mathbf{2^{n-1}} \max_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}| \quad \forall\, 1 \leq k,m \leq n.$$

Aufgabe 4 (6 Punkte)

a) Schreiben Sie eine Matlab-Funktion $[\mathbf{L},\mathbf{R}] = \mathbf{lr}(\mathbf{A})$ zur Berechnung der LR-Zerlegung

der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Modifizieren Sie A schrittweise und speichern Sie die l_{ik} im unteren Dreieck

von A. Die Funktion soll die Matrizen L und R zurückgeben.

b) Erweitern Sie die Funktion $\mathbf{lr}$ zur Funktion $[\mathbf{L},\mathbf{R},\mathbf{p}] = \mathbf{lrp}(\mathbf{A})$ zur Berechnung

der LR-Zerlegung der Matrix A mit Spaltenpivotsuche. Die Zeilenvertauschungen sollen im

Vektor p protokolliert werden, so dass am Ende $\mathbf{LR} = \mathbf{A}(\mathbf{p},:)$.

c) Schreiben Sie eine Matlab-Funktion $\mathbf{x} = \mathbf{solve}(\mathbf{L},\mathbf{R},\mathbf{p},\mathbf{b})$, die mit Hilfe der Ergebnisse von

$\mathbf{lr}$ bzw,. $\mathbf{lrp}$ das Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ löst.

d) Lösen Sie mit $\mathbf{lr}, \mathbf{lrp}$ und $\mathbf{solve}$ die folgenden Gleichungssysteme $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

numerisch:

$$(i)\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (ii)\ A = \begin{pmatrix} 11 & 44 & 1 \\ 0.1 & 0.4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$(iii)\ A = \begin{pmatrix} 0.001 & 1 & 1 \\ -1 & 0.004 & 0.004 \\ -1000 & 0.004 & 0.000004 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vergleichen Sie die Robustheit und die Genauigkeit der Verfahren

$\mathbf{lr}$ und $\mathbf{lrp}$.