**Übungen zur Vorlesung „Numerische Mathematik für Studierende der
Wirtschaftsmathematik, der Lehramter und der Naturwissenschaften“**

Blatt 12

Abgabetermin: 11.7.2006

Aufgabe 1: (5 Punkte) Weisen Sie nach, daß sich die Aufgaben

$$\min \tilde{c}^t \tilde{x} \text{ bei } \tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b} \text{ und } \tilde{x} \geq 0$$

und

$$\min c^t x + d^t y \text{ bei } Ax + By \leq a, \quad Cx + Dy = b \text{ und } x \geq 0, \quad y \text{ frei}$$

äquivalent ineinander überführen lassen.

Aufgabe 2: (6 (3+3) Punkte) Schreiben Sie ein Programm, das ausgehend von einem zulässigen Punkt gemäß der Methode aus dem Skript eine Ecke der zulässigen Menge berechnet. Bestimmen Sie mit dieser Funktion eine Ecke der Menge

$$M := \{x \in \mathbb{R}^{2n} : x_i + x_{n+i} = 1, i = 1, \dots, n, x \geq 0\},$$

ausgehend vom Startvektor $x_0 = (1/2, \dots, 1/2)^T$. Wählen Sie $n = 100$.

Aufgabe 3: (8 (2+6) Punkte) Das folgende Beispiel von Klee und Minty zeigt, daß im Extremfall das Simplex-Verfahren exponentiell viele (hier: 2^n) Schritte durchlaufen muß, bevor es die optimale Lösung gefunden hat:

$$\min(c^T x : x \in \mathbb{R}^n, Ax = b, x_j \geq 0, j = 1, \dots, n)$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \\ 4 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ 8 & 4 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & & & & \\ 2^n & 2^{n-1} & \dots & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 25 \\ 125 \\ \vdots \\ 5^n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c = \begin{pmatrix} -2^{n-1} \\ -2^{n-2} \\ \vdots \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Startpunkt $x_0 = (0, \dots, 0)^T$, optimale Lösung $x = (0, \dots, 0, 5^n)^T$.

a) Überführen Sie das Problem in Normalform, indem Sie n Schlupfvariablen $x_{n+1}, \dots, x_{2n} \geq 0$ einführen. Begründen Sie, dass $x_0 = (0, b)^T \in \mathbb{R}^{2n}$ eine Ecke ist und bestimmen Sie die zugehörige Basismenge J_0 .

b) Verwenden Sie das auf der Vorlesung-Homepage bereitgestellte Programm *simplex.m*, um das Problem von Klee und Minty für $n=10$ zu lösen. Bestätigen Sie, dass $2^n - 1$ Iterationen zur Lösung benötigt werden.

Aufgabe 4: (8 (5+3) Punkte)

Betrachten Sie folgendes Netzwerkfluss-Problem: Es seien m Städte $s_1, \dots, s_m$ durch Einbahnstrassen $w_1, \dots, w_n$ miteinander verbunden (nicht notwendig jede mit jeder). Die Straße w_j führe von Stadt a_j zur Stadt b_j und habe die Länge l_j (in Kilometern). Der Verkehrsfluss x_j (Personen pro Stunde) auf w_j liegt zwischen Null und einer Obergrenze u_j . Der Nettoverkehrsfluss N_j der Stadt s_j ist die Differenz aus Zufluss und Abfluss.

Der Schadstoffausstoß pro Stunde auf der Strasse w_j wird als proportional zu Länge und Verkehrsfluss, also

$$c \cdot l_j \cdot x_j$$

mit einer geeigneten Konstante $c > 0$.

Damit der Nettoverkehrsfluss f zwischen Stadt s_1 und Stadt s_m möglichst umweltschonend ist, muss für die gesuchten Verkehrsflüsse $x_j, j = 1, \dots, n$ folgendes gelten:

- $N_1 = -f, N_2 = 0 = \dots = N_{m-1}, N_m = f$.
- Die Kapazitätsgrenzen auf allen Strassen werden eingehalten.
- Der Gesamtschadstoffausstoß ist minimal.

Formulieren Sie das Problem als lineares Programm.