Prof. Dr. M. Hinze
Dr. S. Heitmann SS 2006

Übungen zur Vorlesung „Numerische Mathematik für Studierende der Wirtschaftsmathematik, der Lehrämter und der Naturwissenschaften“

Blatt 11

Abgabetermin: Aufgaben 1, 3: 4.7.2006, Aufgabe 2: 11.7.2006

Aufgabe 1: (5 Punkte) (Fehlerdarstellung für die summierte Mittelpunktregel) Gegeben sei eine äquidistante Unterteilung $\Delta : a = x_0 < \cdots < x_n = b$ des Intervalls $[a, b]$ mit mit Gitterweite $h = \frac{b-a}{n}$. Weisen Sie nach, dass für die summierte Mittelpunktregel

$$M(h) := \sum_{j=0}^{n} f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) h$$

zur numerischen Berechnung des Integrals $\int\limits_a^b f(x)dx$ die Fehlerdarstellung

$$M(h) - \int\limits_a^b f(x)dx = -\frac{h^2}{24}(b-a)f''(\xi) \text{ mit einem } \xi \in [a, b]$$

gültig ist. Dabei wird $f \in C^2([a, b])$ vorausgesetzt.

Aufgabe 2: (8 (6+1+1) Punkte) Implementieren Sie die adaptive zusammengesetzte Simpsonregel. Verwenden Sie das Abbruchbedingung aus der Vorlesung, siehe Skript (114), mit $\varepsilon = 10^{-6}$. Berechnen Sie damit

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{10^{-4} + x^2} dx,$$

wobei das Integral zu Beginn in 10 äquidistante Teilintervalle unterteilt sein soll. Prüfen Sie anhand der analytischen Lösung die Güte der Quadratur und der Fehlerschätzung. Hinweis dazu: $\int 1/(1 + z^2)dz = \arctan z + C$.

Aufgabe 3: (4 (2+2) Punkte) Lösen Sie das folgende lineare Minimierungsproblem graphisch:

$$\min(c^T x : x \in \mathbb{R}^2, (Ax)_j \le b_j, j = 1, \ldots, 4).$$

Die Nebenbedingungen sind definiert durch

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \\ -5 & 2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} x \le \begin{pmatrix} 2 \\ 18 \\ 13 \\ 7 \end{pmatrix} = b$$

und die Zielfunktion $f(x) := c^T x$ durch $c = (-1, -1)$.
Zeichnen Sie zu diesem Zweck zunächst die Menge

$$M := (x \in \mathbb{R}^2 : (Ax)_j \le b_j, j = 1, \ldots, 4)$$

sowie die Höhenlinien der Zielfunktion $f(x)$. Bestimmen Sie dann anhand der Zeichnung graphisch die Lösung

$$\min_{x \in M} c^T x.$$

Aufgabe 4: (4 (2+1+1) Punkte) Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$ und $c \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Betrachten Sie das lineare Programm (LP)

$$\min(c^T x : x \in \mathbb{R}^n, Ax = b, x_j \geq 0, j = 1, \dots, n)$$

und sein Dualproblem (DP)

$$\max\left(b^T y : y \in \mathbb{R}^m, (A^T y)_i \leq c_i, i = 1, \dots, n\right).$$

Stellen Sie den Zusammenhang zwischen den Lösungen von (LP) und (DP) her. Zeigen Sie zu diesem Zweck:

a) Ist $x \in \mathbb{R}^n$ zulässig für (LP), d.h., $Ax = b, x_j \geq 0, j = 1, \dots, n$ und $y \in \mathbb{R}^m$ zulässig für (DP), d.h., $(A^T y)_i \leq c_i, i = 1, \dots, n$, dann gilt $b^T y \leq c^T x$.

b) Sei nun $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ zulässig für (LP) und $\tilde{y} \in \mathbb{R}^m$ zulässig für (DP). Gilt darüber hinaus noch

$$b^T \tilde{y} = c^T \tilde{x},$$

so sind $\tilde{x}$ und $\tilde{y}$ sogar die Lösungen von (LP) bzw. (DP).

c) Unter den in b) gegebenen Voraussetzungen gilt die Komplementaritätsbedingung

$$\tilde{x}^T (A^T \tilde{y} - c) = 0.$$

.