

**Übungen zur Vorlesung „Numerische Mathematik für Studierende der
Wirtschaftsmathematik, der Lehramter und der Naturwissenschaften“**

Blatt 10

Abgabetermin: 27.6.2006

Aufgabe 1: (6 (3+3) Punkte) Gegeben sei die zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : [0, h] \rightarrow \mathbb{R}$.

a) Leiten Sie eine Quadraturformel $Q(h) = A(h)f(0) + B(h)f(h)$ gemäß

$$\int_0^h f(x)\sqrt{x} dx = A(h)f(0) + B(h)f(h) + R$$

her, indem f durch ein lineares Polynom mit den Stützstellen 0 und h interpoliert wird. Geben Sie eine Darstellung für das Restglied R an.

b) Berechnen Sie nach der in (a) aufgestellten Quadraturformel Q genähert das Integral

$$J = \int_0^{\pi/4} \sqrt{x} \sin x dx$$

und geben Sie Schranken für den auftretenden Fehler an.

Vergleichen Sie mit der Trapez Regel und diskutieren Sie die unterschiedliche Größe des Fehlers.

Aufgabe 2: (4 Punkte) Leiten Sie die Newton-Cotes Formel für $n = 3$ [3/8 Regel] her.

Aufgabe 3: (5 Punkte) Beweisen Sie die Fehlerdarstellung (106) für die Mittelpunkt Regel, d.h. weisen Sie nach, daß mit $Q(f) := (b - a)f(\frac{a+b}{2})$ die Darstellung

$$\int_a^b f(x)dx - Q(f) = \frac{(b - a)^3}{24} f''(\xi) \text{ mit einem } \xi \in [a, b]$$

gültig ist. Tipp: Wenden Sie Hilfsatz 5.2 aus dem Skript für den Fall $n = 0$ an.

Aufgabe 4: (10 (2+2+2+4) Punkte) Berechnen Sie x_0 und x_1 aus der Aufgabe

$$\int_{-1}^1 (x - x_0)^2 (x - x_1)^2 dx \rightarrow \min!$$

x_0 und x_1 können als Stützstellen für eine Quadraturformel dienen. Welche Quadraturformel verwendet genau diese Stützstellen und welche Ordnung hat der Quadraturfehler?