Prof. Dr. M. Hinze
Dr. S. Heitmann SS 2006

Übungen zur Vorlesung

„Numerische Mathematik für Studierende der Wirtschaftsmathematik, der Lehrämter und der Naturwissenschaften“

Blatt 1

Abgabetermin: 18.04.2006

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Für $z = 0.12345 \cdot 10^{-4}$ berechne man $1 - \cos(z)$ auf folgende Weisen

a) $1 - \cos(z)$

b) $1 - \cos(z) = 2\sin^2(z/2)$

c) $1 - \cos(z)$ unter Verwendung der Taylorreihe für $\cos(z)$

d) $\log(1) - \log(1 + z)$

e) $\log(1/(1 + z))$

Für Fall c) benutze man so viele Glieder der Taylorreihe, dass der Fehler
kleiner als 10^{-16} ausfällt. Wie groß ist er dann (Abschätzung des Restgliedes)?
Vergleichen und begründen Sie die Ergebnisse von a) bis e).
Hinweis Gibt man im Kommandofenster *format long* ein, so liefert
Matlab 16 Ziffern.

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\left(\frac{1/x}{10} + 1\right) \cdot x - x = 0.1$.

Setzen Sie für x die natürlichen Zahlen von 1 bis 100 ein und prüfen Sie, wie oft der Rechner in einem Matlab-Programm die obige Gleichheit bestätigt.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Schreiben Sie unter Verwendung der üblichen Lösungsformeln ein Programm, welches zu gegebenen Zahlen
p, q alle reellen und komplexen Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ liefert.
Bedenken Sie dabei, dass in gewissen Fällen die Ergebnisse durch Auslöschung stark verfälscht sein können;

Kontrollieren Sie Ihr Programm anhand der Beispiele $q = 1, p = 100^k, k = 2, 3, 4$, indem Sie jeweils neben den berechneten Lösungen

auch die *relativen Defekte* $d_i := (x_i^2 + p_i x + q)/x_i$ ausgeben.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Sei δ_n ein dem Einheitskreis (d.h. Kreis mit Radius Eins) einbeschriebenes und

Δ_n ein dem Einheitskreis umschriebenes regelmäßiges n-Eck.

Mit u_n bzw. U_n bezeichnen wir den Umfang von δ_n bzw. von Δ_n. Dann ist

$u_n < u_{2n} < 2\pi < U_{2n} < U_n,\ n \geq 3.$

Für diese Umfänge kann man folgende Formeln gewinnen:

$$\begin{aligned} u_{2n} &= \sqrt{4n(2n - \sqrt{4n^2 - u_n^2})} = u_n \sqrt{\frac{4n}{2n + \sqrt{4n^2 - u_n^2}}};\ u_3 = 3\sqrt{3}, \\ U_{2n} &= \frac{4n(\sqrt{4n^2 + U_n^2} - 2n)}{U_n} = \frac{4nU_n}{\sqrt{4n^2 + U_n^2} + 2n};\ U_3 = 6\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Schreiben Sie ein Programm zur Berechnung von u_n und U_n, also zur Näherungsberechnung von π, jeweils nach beiden Formeln.

Werten Sie die Formeln aus für $3{\cdot}2^n, n = 0, 4, 10, 25, 26, 27,$ und vergleichen Sie die Ergebnisse mit der obigen Ungleichung.