Fachrichtung Mathematik
Institut für Numerische Mathematik
Prof. M. Hinze

Übungsklausur Mathematik I

für Studierende der Fakultät Maschinenwesen im Juli 2005

Der Lösungsweg jeder Aufgabe ist auf dem dafür vorgesehenen Blatt deutlich erkennbar und in übersichtlicher Form zu notieren!
Nur die ausgegebenen Blätter werden bewertet.

1. Für erzwungene Schwingungen eines harmonischen Oszillators oder eines elektrischen Schwingkreises ergibt sich im Komplexen die Gleichung

$$y(t) = \frac{1}{|z|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\omega t-\varphi)} \qquad \text{mit} \qquad z = \omega_0^2 - \omega^2 + \mathrm{i}\omega\gamma, \quad \varphi = \arg(z), \quad t \in \mathbb{R} \text{ und } \quad \omega_0, \gamma, \omega \in \mathbb{R}_+.$$

Dabei beschreibt der Realteil von $y(t)$ die Amplitude der Schwingung und t die Zeit. Die Größen $\omega_0 > 0$, $\gamma > 0$ und $\omega > 0$ beschreiben die Eigenfrequenz, die Dämpfungskonstante und die Erregerfrequenz. Die Voraussetzung $0 < \gamma < \sqrt{2}\omega_0$ sichert die Schwingfähigkeit des Systems.

a) Ermitteln Sie $|z|$ sowie (ohne Berechnung von φ) $|y(t)|$ und $\mathrm{Re}(y(t))$.

b) Berechnen Sie $\arg(z)$ für $\omega_0 = 2,\ \gamma = 5\sqrt{3}/9,\ \omega = 3$.

c) Für die maximale Amplitude der Schwingung ergibt sich

$$F(\omega) := \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2}} \qquad \text{für } \omega > 0.$$

Zeigen Sie, dass es ein $\omega = \omega_{\max} > 0$ gibt mit $F(\omega_{\max}) \geq F(\omega)$ für alle $\omega > 0$.
Bestimmen Sie $\omega_{\max}$ und berechnen Sie $\lim\limits_{\gamma\to 0+0} F(\omega_{\max})$ („*Resonanzkatastrophe*“).
Hinweis: Es genügt den Radikanden der Wurzel zu untersuchen. (Warum?)

2. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := A + \frac{B}{1+x}, \qquad \text{mit } A, B \in \mathbb{R} \text{ beliebige Konstanten.}$$

a) Bestimmen Sie die Taylorentwicklung von f an der Stelle $x_0 = 1$ bis zum 2. Glied (Taylorpolynom und Restglied angeben).

b) Die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = \ln x$ hat die Taylorentwicklung

$$g(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3(1+\theta(x-1))^3}(x-1)^3, \qquad \text{mit einem } 0 < \theta < 1.$$

Wie sind A und B zu wählen, damit die ersten Glieder der Taylorentwicklungen von f und g übereinstimmen?
Geben Sie die Abweichung zwischen f und g an der Stelle $x = 1.5$ an.
Hinweis: Benutzen Sie in der Rechnung den Näherungswert $\ln 1.5 \approx 0.4055$!

3. Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y'' - 2y' + (1+\mu)y = r(x), \quad \mu \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

a) Geben Sie die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung in Abhängigkeit von μ an.

b) Lösen Sie (1) für $\mu = 4,\ r(x) = 4\mathrm{e}^x$ und $y(0) = 1, y'(0) = 3$.

c) Bestimmen Sie das Taylorpolynom 4-ten Grades $p_4(x)$ der Funktion $y(x) = \mathrm{e}^x(1+\sin 2x)$ im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

4. Gegeben ist die Randwertaufgabe

$$\ddot{y} - 2\dot{y} + (1+\mu)y \;= 0, \qquad y(0) = 0,\; y(\pi/2) = 0, \quad \mu \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

   a) Ermitteln Sie den Parameter μ so, dass (2) nichttriviale Lösungen hat (Eigenwertproblem!). Wie lauten die Eigenwerte μ_k und die zugehörigen Eigenfunktionen?

   b) Zeigen Sie: Aus der Randwertaufgabe

$$x^2 y'' - xy' + (1+\mu)y \;= 0, \qquad y(1) = 0,\; y(\mathrm{e}^{\pi/2}) = 0. \tag{3}$$

   ergibt sich mit der Substitution $x = \mathrm{e}^t$ die Randwertaufgabe (2).

   c) Wie lauten die Eigenwerte μ_k und die zugehörigen Eigenfunktionen von (3)?

5. Von einer linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten 4. Ordnung

$$y^{(4)} + a_3 y^{(3)} + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = r(x) \tag{4}$$

sind die Fundamentallösungen $y_1 = \mathrm{e}^{-x}$, $y_2 = \mathrm{e}^{x}$ und $y_3 = \sin 3x$ bekannt.

   a) Geben Sie ein vollständiges System von Fundamentallösungen an. Wie lautet die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung?

   b) Bestimmen Sie die Koeffizienten a_i, $i = 0, 1, 2, 3$, in (4). Berechnen Sie für $r(x) = 20\mathrm{e}^{-x}$ die allgemeine Lösung von (4).

   c) Stellen Sie für die lineare Differentialgleichung 4. Ordnung

$$y^{(4)} + 8y'' - 9y = 20\mathrm{e}^{-x}$$

   ein äquivalentes lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung

$$\mathbf{y}'(x) = \mathbf{A}(x)\mathbf{y}(x) + \mathbf{g}(x) \tag{5}$$

   auf. Geben Sie das Fundamentalsystem sowie eine partikuläre Lösung von (5) an.

6. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $f(x, y) = (x^2 + 6y - 16)(y - 2)$.

   a) Bestimmen Sie Lage und Art der relativen Extremwerte und Sattelpunkte von f.

   b) Im $\mathbb{R}^3$ beschreibt die Gleichung $z = f(x, y)$ mit f aus a) eine Fläche $\mathcal{F}$ und die Gleichung $x^2 + (y + 1)^2 = 1$ eine Zylinderfläche $\mathcal{Z}$. Ermitteln Sie die Punkte der Schnittkurve von $\mathcal{F}$ mit $\mathcal{Z}$ mit der kleinsten bzw. größten z-Koordinate.

   c) Bestätigen Sie über die hinreichende Bedingung, dass es sich um Extrema handelt.

7. Gegeben sei die vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängige Funktion

$$f(x, y, z) = \alpha x^2 + (y - \alpha)^2 + (3 - \alpha)(z^2 - z) + 2xy\,.$$

Man bestimme alle $\alpha > 0$, für die f Extrema besitzt (Begründung).
Wie lauten die zugehörigen Extremstellen?