Prof. Dr. M. Hinze
Dr. S. Heitmann SoSe 2006

Lösungen zur Vorlesung „Numerische Mathematik für Studierende der Wirtschaftsmathematik, der Lehrämter und der Naturwissenschaften“
Blatt 9
Abgabetermin: Aufgaben 1–3: 20.6.2006, Aufgabe 4: 27.6.2006

Aufgabe 1: Es sei $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär, und es seien $U,\, V \in \mathbb{R}^{n\times m}$, wobei $m \leq n$ gelte.

a) Beweisen Sie die Aussage: $B+UV^T$ ist genau dann regulär, wenn $I+V^TB^{-1}U$ regulär ist, und in diesem Fall die Sherman–Morrison-Woodbury Formel

$$\big(B+UV^T\big)^{-1} = B^{-1} - B^{-1}U\big(I+V^TB^{-1}U\big)^{-1}V^TB^{-1}\,.$$

b) Bestimmen Sie unter Verwendung von $B = I$ und geeigneter Matrizen U, V mit Hilfe der Sherman–Morrison–Woodbury Formel die Inverse von

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$.

c) Geben Sie einen Algorithmus an zur numerischen Berechnung interpolierender periodischer kubischer Splines, welcher nur die numerische Lösung tridiagonaler linearer Gleichungssysteme erfordert.

Lösung:

zu a) (i) zu zeigen: aus $I+V^TB^{-1}U$ regulär folgt, dass auch $B+UV^T$ regulär.
Nach Voraussetzung existieren B^{-1} und $(I+V^TB^{-1}U)^{-1}$, also auch $B^{-1} - B^{-1}U(I+V^TB^{-1}U)^{-1}V^TB^{-1}$. Die Matrix $B+UV^T$ ist nun genau dann regulär, wenn eine Matrix $\tilde{B}$ existiert, so dass

$$(B+UV^T)\tilde{B} = I.$$

Die Matrix $B^{-1} - B^{-1}U(I+V^TB^{-1}U)^{-1}V^TB^{-1}$ ist das gesuchte $\tilde{B}$, denn

$$\begin{aligned}
&(B+UV^T)\left(B^{-1} - B^{-1}U(I+V^TB^{-1}U)^{-1}V^TB^{-1}\right) \\
&= I + UV^TB^{-1} - U(I+V^TB^{-1}U)^{-1}V^TB^{-1} - UV^T\left(B^{-1}U(I+V^TB^{-1}U)^{-1}V^TB^{-1}\right) \\
&= I + U\left(I - (I+V^TB^{-1}U)^{-1} - V^TB^{-1}U(I+V^TB^{-1}U)^{-1}\right)V^TB^{-1} \\
&= I + U\left(I - (I+V^TB^{-1}U)^{-1}[I+V^TB^{-1}U]\right)V^TB^{-1} \\
&= I + U(I-I)V^TB^{-1} = I.
\end{aligned}$$

(ii) zu zeigen: aus $B + UV^T$ regulär folgt, dass auch $I + V^T B^{-1} U$ regulär.
$I + V^T B^{-1} U$ ist genau dann regulär, wenn

$$(I + V^T B^{-1} U)x = 0$$

nur für $x = 0$ erfüllt ist. Durch Multiplikation von links mit $BB^{-1}U$ folgt

$$0 = (BB^{-1}U + UV^T B^{-1} U)x = (B + UV^T)B^{-1}Ux.$$

Da nach Voraussetzung sowohl B^{-1} als auch $(B+UV^T)^{-1}$ existieren, folgt $Ux = 0$. Wegen

$$(I + V^T B^{-1} U)x = x + V^T B^{-1} Ux = 0$$

ist das aber gleichbedeutend mit $x = 0$, d.h., $I + V^T B^{-1} U$ ist regulär.
zu b) Die Matrix A ist 'fast' die Einheitsmatrix. Versuche daher die Darstellung

$$A = I + UV^T$$

Geeignete Matrizen U und V sind z.B.

$$U = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich die Inverse von A mit Hilfe der Sherman–Morrison–Woodbury Formel zu

$$\begin{aligned} A^{-1} &= I - U(I + V^T U)^{-1} V^T = I - U \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}^{-1} V^T \\ &= I - \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{1-\alpha^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= I - \frac{1}{1-\alpha^2} \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & \alpha^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

zu c) Berechnung interpolierender periodischer kubischer Splines führt auf ein Gleichungssystem mit Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & \mu_1 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_{n+1} & 0 & \cdots & \cdots & \mu_{n+1} & 2 \end{pmatrix}.$$

Sie lässt sich darstellen als Summe einer Tridiagonalmatrix T und der Matrix UV^T mit geeigneten $U, V \in \mathbb{R}^{(n+1)\times 2}$. Geeignet sind z.B.

$$U = \begin{pmatrix} 0 & \mu_1 \\ \vdots & 0 \\ 0 & \vdots \\ \lambda_{n+1} & 0 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vdots \\ \vdots & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung des entsprechenden linearen Gleichungssystems $Ax = (T + UV^T)x = d$ ist also gegeben durch

$$x = (T + UV^T)^{-1}d = T^{-1}d - T^{-1}U(I + V^T T^{-1}U)^{-1}V^T T^{-1}d$$

und erfordert die Schritte

a) Löse $Tw = d$

b) Berechne $Z = T^{-1}U$

c) Berechne $U(I + V^T z)^{-1}w = h$

d) Löse $Tv = h$

e) Berechne $x = w - h$

Alternative Berechnung:
konstruiere Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^{n+1}$, so dass

$$\begin{aligned} A &= \tilde{T} + uv^T, \\ \text{wobei } \tilde{T} &= T + diag(-\mu_1, 0, \ldots, 0, -\lambda_{n+1}) \\ \text{und } u &= (\mu_1, 0, \ldots, 0, \lambda_{n+1})^T, v = (1, 0, \ldots, 0, 1)^T. \end{aligned}$$

Damit ist die Lösung des entsprechenden linearen Gleichungssystems $Ax = (\tilde{T} + uv^T)x = d$ gegeben durch

$$x = (\tilde{T} + uv^T)^{-1}d = \tilde{T}^{-1} - \frac{1}{1 + v^T \tilde{T}^{-1}u}\tilde{T}^{-1}uv^T\tilde{T}^{-1}d$$

und erfordert die Schritte

a) Löse $\tilde{T}w = d$ und $\tilde{T}z = u$

b) Setze $x = w - \frac{1}{1+v^T z} z v^T w$

Aufgabe 2:
Gegeben ist die Randwertaufgabe [$\mu \geq 0$]

$$-u''(x) + \mu u(x) = f(x) \quad \text{für } x \in [0,1] \qquad \text{und} \qquad u(0) = u(1) = 0.$$

Über die schwache Formulierung und nach Diskretisierung des Funktionenraums erhält man die Aufgabe:
Gesucht $u_h \in V_h$ mit

$$\int_0^1 u_h'(x)v'(x)\,dx + \mu \int_0^1 u_h(x)v(x)\,dx = \int_0^1 f(x)v(x)\,dx \qquad \text{für alle } v \in V_h \tag{1}$$

mit einem geeigneten Raum V_h.

Gegeben sei nun eine Zerlegung $\Delta : 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1} = 1$ des Intervalls $[0,1]$ und sei $V_h = \operatorname{span}\{b_i, i = 1, ..., n\}$ mit

$$b_j(x) = \begin{cases} \dfrac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j} & \text{falls } x \in [x_j, x_{j+1}) \\ \dfrac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} & \text{falls } x \in (x_{j-1}, x_j) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Wie lautet das lineare Gleichungssystem, wenn (1) für alle $v = b_j, j = 1, ..., n$ gefordert und für u_h der Ansatz

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i b_i(x)$$

verwendet wird.

(b) Welche Eigenschaften hat die Koeffizientenmatrix dieses Systems.

Lösung:

(a) Zunächst ist die Forderung „für alle $v \in V_h$“ äquivalent zur Forderung „für alle $b_j, j = 1, ..., n$“, weil diese Funktionen eine Basis von V_h sind.

Da der Träger der Funktionen b_j jeweils das Intervall $[x_{j-1}, x_{j+1}]$ ist, erhält man aus (1) offensichtlich

$$\sum_{i=1}^{n} u_i \left\{ \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} b_i'(x)b_j'(x)\,dx + \mu \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} b_i(x)b_j(x)\,dx \right\} = \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} f(x)b_j(x)\,dx \qquad \text{für } j = 1, ..., n$$

Offensichtlich sind für festes j die Koeffizienten vor u_i nur dann ungleich Null, wenn $|i-j| \leq 1$ gilt.

D.h., zum Aufstellen der Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems sind nur zu berechnen

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} b_{j+1}'(x)b_j'(x)\,dx \qquad \text{und} \qquad \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} b_j'(x)b_j'(x)\,dx$$

sowie

$$\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} b_{j+1}(x) b_j(x)\,dx \qquad \text{und} \qquad \int\limits_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} b_j(x) b_j(x)\,dx$$

Wir verwenden nun die Abkürzung $\boxed{h_j := x_j - x_{j-1}}$

Aus

$$b_j'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{h_{j+1}} & \text{falls } x \in (x_j, x_{j+1}) \\ \dfrac{1}{h_j} & \text{falls } x \in (x_{j-1}, x_j) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

[d.h. $b_j'(x)$ ist stückweise konstant] folgt offensichtlich

$$\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} b_{j+1}'(x) b_j'(x)\,dx = -\frac{1}{h_{j+1}} \qquad \text{und} \qquad \int\limits_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} b_j'(x) b_j'(x)\,dx = \frac{1}{h_j} + \frac{1}{h_{j+1}}$$

Weiter ergibt sich

$$\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} b_j(x) b_j(x)\,dx = \frac{1}{[h_{j+1}]^2} \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} (x_{j+1} - x)^2\,dx = -\frac{1}{3[h_{j+1}]^2}(x_{j+1} - x)^3 \,\Big|_{x_j}^{x_{j+1}} = \frac{h_{j+1}}{3}$$

also

$$\int\limits_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} b_j(x) b_j(x)\,dx = \frac{1}{3}\{h_{j+1} + h_j\}$$

und

$$\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} b_{j+1}(x) b_j(x)\,dx = \frac{1}{[h_{j+1}]^2} \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} (x_{j+1} - x)(x - x_j)\,dx$$

Wegen $\dfrac{1}{[h_{j+1}]^2}(x_{j+1} - x)(x - x_j) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{[h_{j+1}]^2}(x - \dfrac{x_{j+1} + x_j}{2})^2$ ergibt sich

$$\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} b_{j+1}(x) b_j(x)\,dx = [\frac{1}{4}x - \frac{1}{3[h_{j+1}]^2}(x - \frac{x_{j+1} + x_j}{2})^3] \,\Big|_{x_j}^{x_{j+1}} = \frac{1}{4}h_{j+1} - \frac{1}{12}h_{j+1} = \frac{1}{6}h_{j+1}$$

Damit entsteht bei der Diskretisierung ein lineares Gleichungssystem $Ax = c$ mit

$$x = (u_1, ..., u_n)^t \qquad \text{und} \qquad c_j = \int\limits_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} f(x) b_j(x)\,dx$$

sowie $A=(a_{ji})=A^{(1)}+\mu A^{(2)}=(a_{ji}^{(1)})+\mu(a_{ji}^{(2)})$ mit

$$a_{ji}^{(1)}=\begin{cases}\dfrac{1}{h_j}+\dfrac{1}{h_{j+1}} & \text{falls } i=j\\[2ex] -\dfrac{1}{h_j} & \text{falls } i=j-1\\[2ex] -\dfrac{1}{h_{j+1}} & \text{falls } i=j+1\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases} \quad \text{und} \quad a_{ji}^{(2)}=\begin{cases}\dfrac{1}{3}\{h_{j+1}+h_j\} & \text{falls } i=j\\[2ex] \dfrac{1}{6}h_j & \text{falls } i=j-1\\[2ex] \dfrac{1}{6}h_{j+1} & \text{falls } i=j+1\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

(b) Die Matrix A ist offensichtlich symmetrisch. $A^{(1)}$ und $A^{(2)}$ sind diagonal dominant und damit positiv definit, also auch A.

oder

Beweis der Diagonaldominanz auch anders:

Wir wollen z.B. zeigen: $v^T A^{(2)} v > 0$ für alle $v \neq 0$.

Dazu betrachten wir ein $v \neq 0$, ordnen diesem v die Funktion

$$g(x)=\sum_i v_i b_i(x)$$

zu und betrachten

$$\int_a^b [g(x)]^2\,dx\,.$$

Offensichtlich gilt einerseits $\int_a^b [g(x)]^2\,dx > 0$. Andererseits ist

$$\int_a^b [g(x)]^2\,dx=\int_a^b [\sum_i v_i b_i(x)][\sum_j v_j b_j(x)]\,dx=\sum_i\sum_j v_i v_j\int_a^b b_i(x)b_j(x)\,dx=v^T A^{(2)} v$$

Daraus folgt insgesamt die positive Definitheit von $A^{(2)}$.

Aufgabe 3:
Gegeben sind die Daten

x	0	1	2	3	4
y	0	3	1	-1	0

einer Funktion $y=f(x)$.
Bestimmen Sie jeweils den kubischen interpolierenden Spline $S_\Delta(x)$ mit

a) natürlichen Randbedingungen,

b) periodischen Randbedingungen (Periode T=4) und

c) *not-a-knot* Bedingungen (DE BOOR Spline).
Die *not-a-knot* Bedingungen lauten:
$\lim\limits_{x\nearrow x_1} S'''_\Delta(x) = \lim\limits_{x\searrow x_1} S'''_\Delta(x)$ und $\lim\limits_{x\nearrow x_n} S'''_\Delta(x) = \lim\limits_{x\searrow x_n} S'''_\Delta(x)$.
D. h., bei x_1 und x_n ist auch die dritte Ableitung von S_Δ stetig. Damit ist S_Δ auf $[x_0, x_1]$ und $[x_1, x_2]$ sowie auf $[x_{n-1}, x_n]$ und $[x_n, x_{n+1}]$ identisch. Folglich sind x_1 und x_n eigentlich *keine Knoten*.

Zu jeder Spline-Funktion sind das zu lösende lineare Gleichungssystem zur Bestimmung der Momenten $M_0, \ldots, M_{n+1}$, die Momenten sowie die Koeffizienten $A_1, \ldots, A_{n+1}$ und $B_1, \ldots, B_{n+1}$ anzugeben.

(d)* Berechnen Sie die *Gesamtkrümmung* $K_p = \int\limits_{x_0}^{x_{n+1}} p''(x)^2\,dx$ des Interpolationspolynoms p und die *Gesamtkrümmung* $K_s = \int\limits_{x_0}^{x_{n+1}} S''_\Delta(x)^2\,dx$ des kubischen interpolierenden Splines S_Δ mit natürlichen Randbedingungen. Welche Eigenschaft des kubischen interpolierenden Splines wird dadurch bestätigt?

Lösung:

a) Für den kubischen Interpolationsspline gilt laut Vorlesungsskript, Abschnitt 3.2.1:

$$S_\Delta(x) = M_i \frac{(x - x_{i-1})^3}{6\,h_i} + M_{i-1} \frac{(x_i - x)^3}{6\,h_i} + A_i(x - x_{i-1}) + B_i \tag{2}$$

für $x \in [x_{i-1}, x_i] = [i-1, i]$, $i = 1, 2, \ldots, n+1 = 4$ mit

$$B_i = f_{i-1} - M_{i-1}\frac{h_i^2}{6} \quad \text{und} \quad A_i = \frac{f_i - B_i}{h_i} - M_i \frac{h_i}{6}. \tag{3}$$

Dabei genügen die Momenten $M_0, \ldots, M_{n+1}$ den Gleichungen

$$\mu_i M_{i-1} + 2M_i + (1 - \mu_i) M_{i+1} = d_i \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{4}$$

wobei

$$\mu_i = \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}} = \frac{1}{2} \text{ und } d_i = \frac{6}{h_i + h_{i+1}} \left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} \right) = 3(f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1})$$

mit $h_i = 1$ für $i = 1, 2, \ldots, 4$ und $f_0 = 0$, $f_1 = 3$, $f_2 = 1$, $f_3 = -1$, $f_4 = 0$.

(a) natürliche Randbedingungen:
Das lineare System (95) aus dem Vorlesungsskript lautet dann

$$\begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix},$$

wobei sich $M_0 = M_4 = 0$ wegen $d_0 = d_4 = 0$ und $\lambda_0 = \mu_4 = 0$ explizit ablesen lassen. Daraus ergeben sich folgende Koeffizienten für den natürlichen kubischen Spline:

i	M_i	A_i	B_i
0	0	–	–
1	$-\frac{54}{7}$	$\frac{30}{7}$	0
2	$\frac{6}{7}$	$-\frac{24}{7}$	$\frac{30}{7}$
3	$\frac{30}{7}$	$-\frac{18}{7}$	$\frac{6}{7}$
4	0	$\frac{12}{7}$	$-\frac{12}{7}$

(b) periodische Randbedingungen (Periode T=4):
Das lineare System (96) aus dem Vorlesungsskript lautet dann

$$\begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ 0 \\ 9 \\ 6 \end{bmatrix},$$

wobei $M_0 = M_4$ gilt. Daraus ergeben sich folgende Koeffizienten für den periodischen kubischen Spline mit Periode $T = 4$:

i	M_i	A_i	B_i
0	$\frac{9}{2}$	–	–
1	-9	$\frac{21}{4}$	$-\frac{3}{4}$
2	$\frac{3}{2}$	$-\frac{15}{4}$	$\frac{9}{2}$
3	3	$-\frac{9}{4}$	$\frac{3}{4}$
4	$\frac{9}{2}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{2}$

(c) *not-a-knot* Bedingungen (de Boor Spline):
Wegen

$$S'''_\Delta(x) = \frac{M_i - M_{i-1}}{h_i} \quad \text{für} \quad x \in [x_{i-1}, x_i] = [i-1, i],\ i = 1, \ldots, n+1 = 4$$

lauten die beiden *not-a-knot* Bedingungen

$$M_1 - M_0 = M_2 - M_1 \iff M_0 - 2M_1 + M_2 = 0 \quad \text{und}$$

$$M_3 - M_2 = M_4 - M_3 \iff M_2 - 2M_3 + M_4 = 0\,,$$

die die erste und letzte Gleichung im Gleichungssystem (95) aus dem Vorlesungsskript ersetzen. Die Momenten $M_0, \ldots, M_4$ lassen sich also aus dem System

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -15 \\ 0 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix},$$

berechnen. Die Koeffizienten für den kubischen Interpolations-Spline mit *not-a-knot* Bedingungen sind:

i	M_i	A_i	B_i
0	$-\frac{21}{2}$	–	–
1	-5	$\frac{25}{12}$	$\frac{7}{4}$
2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{35}{12}$	$\frac{23}{6}$
3	3	$-\frac{29}{12}$	$\frac{11}{12}$
4	$\frac{11}{2}$	$\frac{7}{12}$	$-\frac{3}{2}$

(d)* (i) *Gesamtkrümmung* des Interpolationspolynoms p_4:
Aus

$$p_4''(x) = -x^2 + 8x - \frac{71}{6}\,, \; p_4''(x)^2 = x^4 - 16x^3 + \frac{263}{3}x^2 - \frac{568}{3}x + \frac{5041}{36}$$

ergibt sich

$$K_p = \int_0^4 p_4''(x)^2\,dx = \frac{1447}{15} = 96.46\bar{6}\,.$$

(ii) *Gesamtkrümmung* des kubischen interpolierenden Splines S_Δ mit natürlichen Randbedingungen:
Zunächst gilt

$$S_\Delta''(x) = \frac{M_i}{h_i}(x - x_{i-1}) + \frac{M_{i-1}}{h_i}(x_i - x) \quad \text{für} \quad x \in [x_{i-1}, x_i]\,,\; i = 1, 2, \ldots, 4,$$

und unter Berücksichtigung von $h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = 1$ ergibt sich damit

$$S_\Delta''(x)^2 = M_i^2(x - x_{i-1})^2 + 2M_iM_{i-1}(x - x_{i-1})(x_i - x) + M_{i-1}^2(x_i - x)^2$$

für $x \in [x_{i-1}, x_i] = [i-1, i]\,,\; i = 1, \ldots, 4$. Folglich ist

$$\int_{i-1}^{i} S_\Delta''(x)^2\,dx = \frac{1}{3}(M_i^2 + M_iM_{i-1} + M_{i-1}^2) \quad \text{für } i = 1, \ldots, 4.$$

Wegen $M_0 = M_4 = 0$ erhält man also insgesamt

$$\begin{aligned} K_s &= \int_0^4 S_\Delta''(x)^2\,dx = \sum_{i=1}^{4} \int_{i-1}^{i} S_\Delta''(x)^2\,dx \\ &= \tfrac{1}{3}(M_1M_2 + M_2M_3) + \tfrac{2}{3}(M_1^2 + M_2^2 + M_3^2) = -\tfrac{48}{49} + \tfrac{2568}{49} = \tfrac{360}{7} \approx 51.43\,. \end{aligned}$$

Entsprechend Bemerkung 4.26 aus dem Vorlesungsskript hat der natürliche kubische interpolierende Spline $S_\Delta(x)$ minimale Gesamtkrümmung unter allen zweimal stetig differenzierbaren interpolierenden Funktionen auf dem Intervall $[0, 4]$. Folglich war $K_s < K_p$ zu erwarten.

Aufgabe 4: Lösung: wird nachgereicht