Prof. Dr. M. Hinze
Dr. S. Heitmann SoSe 2006

Lösungen zur Vorlesung „Numerische Mathematik für Studierende der Wirtschaftsmathematik, der Lehrämter und der Naturwissenschaften“
Blatt 8
Abgabetermin: Aufgaben 1–2: 13.6.2006, Aufgabe 3: siehe Lösungen Blatt 9

Aufgabe 1: Für den Interpolationsfehler einer beliebig glatten Funktion f (Interpolation mit einem Polynom $p(x)$ mit $p(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, ..., n$) auf dem Intervall $[a, b]$ mit den Stützstellen x_i, $i = 0, 1, ..., n$, für die gelte $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$, gilt die Abschätzung

$$\|f - p\|_\infty := \max_{x\in[a,b]} |f(x) - p(x)| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty (b - a)^{n+1}}{(n + 1)!}.$$

Bestimmen Sie die rechte Seite für $f(x) = \sin(x)$ und $[a, b] = [0, \pi]$.
Was lässt sich daraus für $n \to \infty$ schlussfolgern ? $\boxed{\text{Lösung:}}$ Es ist

$$|f^{(n)}(x)| = \begin{cases} |\sin x| & \text{für } n \text{ gerade} \\ |\cos x| & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

und damit $\|f^{(n)}\|_\infty = \max_{x\in[0,\pi]} |f^{(n)}(x)| = 1$.

Damit erhält man die Abschätzung

$$\|f - p\|_\infty \leq \frac{\pi^{n+1}}{(n + 1)!}.$$

Wegen $\lim_{n\to\infty} \frac{\pi^{n+1}}{(n + 1)!} = 0$ folgt, dass der Fehler der obigen Interpolationsaufgabe für $f(x) = \sin(x)$ für $n \to \infty$ gleichmäßig gegen Null geht.

Aufgabe 2:
Seien $[a, b] \subset \mathbb{R}$ und $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$ vorgegeben. Bezeichne $p_f \in \Pi_n$ das Interpolationspolynom zur Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und den Knoten $x_0, \ldots, x_n$. Geben Sie zu jedem $C > 0$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion f an, so dass der maximale Interpolationsfehler

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - p_f(x)|$$

größer als C ist. $\boxed{\text{Lösung:}}$ Wähle beliebiges, aber festes $C > 0$ und eine Stelle $x_{n+1} \in [a, b]\backslash\{x_0, ..., x_n\}$. Sei f das Interpolationspolynom zu den Stützstellen $(x_0, 0), (x_1, 0), ..., (x_n, 0)$ sowie $(x_{n+1}, 2C)$. Damit ist also $f \in \Pi_{n+1}$. Andererseits ist nach Voraussetzung $p_f \in \Pi_n$ das Interpolationspolynom zu den Knoten $x_0, ..., x_n$, also $p_f = 0$. Daher ist der Interpolationsfehler

$$max_{x\in[a,b]}|f(x) - p_f(x)| \geq |f(x_{n+1}) - p_f(x_{n+1})| = 2C > C.$$

Aufgabe 3:

$\boxed{\text{Lösung}}$: Siehe Lösungen Blatt 9