Prof. Dr. M. Hinze
Dr. S. Heitmann SoSe 2006

Lösungen zur Vorlesung „Numerische Mathematik für Studierende der Wirtschaftsmathematik, der Lehrämter und der Naturwissenschaften“
Blatt 4
Abgabetermin: 09.05.2006

Aufgabe 1:
a.) Wir gelangen nicht nach P_3, also ist $G(A)$ nicht stark zusammenhängend, demnach A nicht irreduzibel.

b.) Klar

c.) Addition einer Diagonalmatrix entfernt Schlaufen oder fügt Schlaufen hinzu (Kanten von P_i nach P_i heißen Schlaufen). Demnach ist das Resultat wieder irreduzibel.

d.) A strikt diagonaldominante (n,n)–Matrix. Wir nehmen an, dass ein $x \neq 0$ exisitiert mit $Ax = 0$. Sei $1 \leq k \leq n$ mit $\|x\|_\infty = |x_k|$. Dann impliziert $a_{kk}x_k + \sum\limits_{j \neq k} a_{kj}x_j = 0$ direkt

$$|a_{kk}| \leq \sum_{j \neq k} |a_{kj}| \frac{|x_j|}{|x_k|} \leq \sum_{j \neq k} |a_{kj}|,$$

also einen Widerspruch zur strikten Diagonaldominanz von A. Demnach muß A regulär sein.

e.) A irreduzibel diagonaldominant. Wir nehmen wieder an, dass ein $x \neq 0$ exisitiert mit $Ax = 0$. Wir betrachten die Indexmengen

$$\mathcal{K} := \{k; |x_k| = \|x\|_\infty\} \text{ und } \mathcal{J} := \{k; |x_k| < \|x\|_\infty\}.$$

Dann gilt $\mathcal{K} \cup \mathcal{J} = \{1, \ldots, n\}$ und $\mathcal{K} \cap \mathcal{J} = \emptyset$. Es gilt allerdings auch $\mathcal{J} \neq \emptyset$, denn falls nicht, lieferte $Ax = 0$

$$|a_{kk}||x_k| \leq \sum_{j \neq k} |a_{kj}||x_j| \text{ für alle } k = 1, \ldots, n,$$

also einen Widerspruch zu $|a_{kk}| > \sum\limits_{j \neq k} |a_{kj}|$ für mindestens ein $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Es gibt also Indizes $k \in \mathcal{K}$ und $j \in \mathcal{J}$ mit $a_{kj} \neq 0$, denn falls nicht, folgte $a_{kk} = 0$ und es gäbe keine von P_k wegführenden Kanten in $G(A)$, so dass Letzterer nicht stark zusammenhängend wäre. Ähnlich zu d.) schliessen wir jetzt für einen solchen Index k

$$|a_{kk}| \leq \sum_{l \neq k} |a_{kl}| \frac{|x_l|}{|x_k|} < \sum_{l \neq k} |a_{kl}|,$$

weil für $l = j$ $\frac{|x_l|}{|x_k|} < 1$ und $a_{kj} \neq 0$ gilt. Das stellt schließlich einen Widerspruch zur irreduziblen Diagonaldominanz von A dar. Also muß A regulär sein.

Aufgabe 2:
a.) Sei

$$B := \begin{bmatrix} \beta & \gamma & & \\ \alpha & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \gamma \\ & & \alpha & \beta \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

mit $\alpha \cdot \gamma > 0$. Dann besitzt B die Eigenwerte

$$\lambda_i = \beta + 2\sqrt{\alpha\gamma}\ \mathsf{sign}(\alpha) \cos(\frac{i\pi}{n+1}),\ 1 \le i \le n$$

und die Eigenvektoren v^i mit den Komponenten

$$v^i_j = (\frac{\alpha}{\gamma})^{\frac{j-1}{2}} \sin(\frac{ij\pi}{n+1}),\ 1 \le i \le n, 1 \le j \le n.$$

Lösung:

1. Wählt man in obiger Formel $j = 0$ und $j = n+1$, dann erhält man $v^i_0 = v^i_{n+1} = 0$. Damit gilt

$$\begin{aligned} (Bv^i)_j &= \gamma v^i_{j+1} + \beta v^i_j + \alpha v^i_{j-1} \\ &= \gamma(\frac{\alpha}{\gamma})^{\frac{j}{2}} \sin(\frac{i(j+1)\pi}{n+1}) + \beta(\frac{\alpha}{\gamma})^{\frac{j-1}{2}} \sin(\frac{ij\pi}{n+1}) + \alpha(\frac{\alpha}{\gamma})^{\frac{j-2}{2}} \sin(\frac{i(j-1)\pi}{n+1}) \\ &= (\frac{\alpha}{\gamma})^{\frac{j-1}{2}} \left\{ \gamma(\frac{\alpha}{\gamma})^{\frac{1}{2}} \sin(\frac{i(j+1)\pi}{n+1}) + \beta \sin(\frac{ij\pi}{n+1}) + \alpha(\frac{\alpha}{\gamma})^{\frac{-1}{2}} \sin(\frac{i(j-1)\pi}{n+1}) \right\} \\ &= (\frac{\alpha}{\gamma})^{\frac{j-1}{2}} \left\{ \mathsf{sign}(\alpha)\sqrt{\alpha\gamma} \sin(\frac{i(j+1)\pi}{n+1}) + \beta \sin(\frac{ij\pi}{n+1}) + \mathsf{sign}(\alpha)\sqrt{\alpha\gamma} \sin(\frac{i(j-1)\pi}{n+1}) \right\} \end{aligned}$$

Wegen Additionstheorem $\sin(\delta_1 \pm \delta_2) = \sin(\delta_1)\cos(\delta_2) \pm \cos(\delta_1)\sin(\delta_2)$ gilt:

$$\sin(\frac{i(j+1)\pi}{n+1}) + \sin(\frac{i(j-1)\pi}{n+1}) = 2\sin(\frac{ij\pi}{n+1})\cos(\frac{i\pi}{n+1}) \quad \Rightarrow$$

$$(Bv^i)_j = (\frac{\alpha}{\gamma})^{\frac{j-1}{2}} \sin(\frac{ij\pi}{n+1}) \left\{ 2\sqrt{\alpha\gamma}\ \mathsf{sign}(\alpha)\cos(\frac{i\pi}{n+1}) + \beta \right\} = \lambda_i v^i_j$$

D.h. λ_i, $i = 1, ..., n,$ ist Eigenwert von B zum Eigenvektor v^i !

2. Offensichtlich gilt $\lambda_k \neq \lambda_l$ für $k \neq l$, d.h. alle Eigenwerte haben die algebraische Vielfachheit 1 und damit die geometrische Vielfachheit 1, d.h. die obige Behauptung gilt.

Seien jeztz $\beta = \frac{2}{h^2}, \alpha = \gamma = \frac{-1}{h^2}$ Dann ist B symmetrisch, folglich gilt

$$\|B\|_2 = \rho(B),$$

d.h. der Spektralradius von B stimmt mit der Spetralnorm von B überein. Damit gilt für symmetrische Matrizen B auch

$$\kappa_2(B) = \rho(B)\rho(B^{-1}) = \frac{\lambda_{max}(B)}{\lambda_{min}(B)}, \text{ falls } B \text{ positiv definit.}$$

In unserem Fall gilt $\lambda_n = \lambda_{max}(B)$ und $\lambda_1 = \lambda_{min}(B)$. Ferner

$$h^2\lambda_1 = 2(1 - \cos\frac{\pi}{n+1}) \approx \frac{\pi^2}{(n+1)^2}, \quad h^2\lambda_n = 2(1 - \cos\frac{n\pi}{n+1}) \approx (4 - \frac{\pi^2}{(n+1)^2}),$$

wobei wir Terme höherer Ordnung als 2 in $h^2 = \frac{1}{(n+1)^2}$ vernachlässigt haben. Wir erhalten

$$\kappa_2(B) = \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \approx \frac{4}{\pi^2}(n+1)^2 \approx h^{-2}.$$

Die Kondition von B wächst demnach wie n^2, wird also sehr schlecht, falls n sehr groß wird.

b.) Die Iterationsmatrix des Jacobi–Verfahrens zu B hat die Gestalt

$$M^J := - \begin{bmatrix} 0 & \frac{\gamma}{\beta} & & \\ \frac{\alpha}{\beta} & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \frac{\gamma}{\beta} \\ & & \frac{\alpha}{\beta} & 0 \end{bmatrix}$$

Hinreichende Bedingungen für die Konvergenz des Jacobi–Verfahrens:

- $|\alpha| + |\gamma| < |\beta|$ (strikte Diagonaldominanz),
- $\alpha, \gamma \neq 0$ und $|\alpha| + |\gamma| \leq |\beta|$ (Irreduzible Diagonaldominanz),
- $\frac{\sqrt{\alpha\gamma}}{|\beta|} \leq \frac{1}{2}$ (Eigenwerte von M^J dann alle betragsmässig kleiner als 1, also auch der Spektralradius).

Notwendige Bedingung (Spektralradius kleiner als 1):

$$\frac{\sqrt{\alpha\gamma}}{|\beta|}\cos\frac{i\pi}{n+1} < \frac{1}{2} \text{ für } i = 1, \ldots, n.$$

c.) Sei

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Dann besitzt A die Eigenwerte 4 und 1 (doppelt), ist also positiv definit. Ferner besitzt

$$M^J = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

die Eigenwerte -1 und 1/2 (doppelt), also einen Spektralradius ≥ 1. Somit kann das Jacobi-Verfahren nicht konvergieren.

Aufgabe 3:
a.) Laut Voraussetzung sind alle Einträge in L_h von Null verschieden und L_h ist eine Tridiagonalmatrix, also irreduzibel. Ferner gilt

$$d_i \geq -(l_i + r_i) \text{ für alle } 2 \leq i \leq n-1$$

und $d_1 > -r_1$, bzw. $d_n > -l_n$, so dass L_h irreduzibel diagonaldominant ist und somit nach A1 e.) regulär.

b.) Wir haben (im Fall $b_i \geq 0$)

$$d_i \geq \frac{2}{h^2} = \frac{1}{h^2} + \frac{b_i}{2h} + \frac{1}{h^2} - \frac{b_i}{2h} = |l_i| + |r_i| \text{ für alle } 2 \leq i \leq n-1,$$

weil $\frac{1}{h^2} - \frac{b_i}{2h} > 0$ gilt. Ferner gilt

$$|r_1| = \frac{1}{h^2} - \frac{b_1}{2h} \leq \frac{1}{h^2} < \frac{2}{h^2} \leq d_1$$

und

$$|l_n| = \frac{1}{h^2} + \frac{b_1}{2h} < \frac{2}{h^2} \leq d_n,$$

so dass L_h irreduzibel diagonaldominant ist, denn $0 < h < \frac{2}{|b_i|}$ impliziert auch, dass alle Einträge von L_h von Null verschieden sind. Der Fall $b_i \leq 0$ geht analog.

c.)* Die Bedingungen aus a.) und b.) sind jeweils auch hinreichend für die Konvergenz, denn das schwache Zeilensummenkriterium ist unter genannten Voraussetzungen erfüllt. Demnach konvergieren dann Jacobi- und Gauß–Seidel Verfahren. **Aufgabe 4:**
Wird noch ergänzt.