

**Lösungen zur Vorlesung „Numerische Mathematik für Studierende der
Wirtschaftsmathematik, der Lehramter und der Naturwissenschaften“**

Blatt 3

Abgabetermin: 02.05.2006

Aufgabe 1:

$$\|A\|_1 = \max_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1 = \max_{\|x\|_1=1} \sum_{i=1}^n \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \right| \leq \max_{\|x\|_1=1} \sum_{k=1}^n |x_k| \sum_{i=1}^n |a_{ik}| \leq \max_{1 \leq k \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ik}|$$

Die obere Grenze wird erreicht durch $x = e_k$, den Einheitsvektor mit 1 an der k -ten Stelle.

$$\|A\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty=1} \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \right| \leq \max_{\|x\|_\infty=1} \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{k=1}^n |a_{ik} x_k| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{k=1}^n |a_{ik}|$$

Die obere Grenze wird erreicht durch $x = \sum_{k=1}^n \text{sign}(a_{ik}) e_k$ mit sign als der Vorzeichenfunktion.

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = \max_{x^T x=1} \sqrt{(Ax)^T Ax} = \max_{x^T x=1} \sqrt{x^T A^T A x}$$

Da $A^T A$ eine symmetrische und positiv semidefinite Matrix ist (Vektornorm), existieren n nicht-negative Eigenwerte $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n \geq 0$ und zugehörige orthonormale Eigenvektoren $x^i \in \mathbb{R}^n$. Sei $X = [x^1, x^2, \dots, x^n]$ die Matrix der Eigenvektoren. Dann gilt

$$X^T A^T A X = M = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n).$$

Sei nun $x \in \mathbb{R}^n$, $x^T x = 1$. Dann existiert $y \in \mathbb{R}^n : x = Xy = \sum_{i=1}^n y_i x^i$ (Wechsel der Basisdarstellung). Dann gilt

$$1 = x^T x = (Xy)^T Xy = y^T X^T Xy = y^T y$$

und

$$x^T A^T A x = (Xy)^T A^T A Xy = y^T \underbrace{X^T A^T A X}_M y = \sum_{i=1}^n \mu_i y_i^2.$$

Somit folgt

$$\|A\|_2 = \max_{x^T x=1} \sqrt{x^T A^T A x} = \max_{y^T y=1} \sqrt{y^T M y} = \max_{y^T y=1} \sqrt{\sum_{i=1}^n \mu_i y_i^2} \leq \max_{y^T y=1} \sqrt{\mu_1 \sum_{i=1}^n y_i^2} = \sqrt{\mu_1}$$

und die obere Grenze wird für $x = x^1$ erreicht.

Aufgabe 2:

zu a) Für einen beliebigen Vektor $x \neq 0$ folgt aus der Dreiecksungleichung für Vektornormen

$$\|(E + F)x\| = \|x + Fx\| \geq \|x\| - \|Fx\| \geq \|x\| - \|F\| \|x\| = (1 - \|F\|)\|x\| \geq 0.$$

Das homogene Gleichungssystem $(E + F)x = 0$ besitzt somit nur die Lösung $x = 0$ und $E + F$ ist regulär. Weiterhin ist

$$\begin{aligned} 1 &= \|E\| = \|(E + F)(E + F)^{-1}\| = \|(E + F)^{-1} + F(E + F)^{-1}\| \\ &\geq \|(E + F)^{-1}\| - \|F(E + F)^{-1}\| \geq \|(E + F)^{-1}\| - \|F\| \|(E + F)^{-1}\| = \|(E + F)^{-1}\|(1 - \|F\|). \end{aligned}$$

zu b) Bedingung für die Abschätzung ist, dass $\|A^{-1}\delta A\| < 1$, also $\|A^{-1}\| \|\delta A\| < 1$. Wegen $A + \delta A = A(E + A^{-1}\delta A)$ ist

$$\begin{aligned} \|(A + \delta A)^{-1}\| &= \|(E + A^{-1}\delta A)^{-1} A^{-1}\| \leq \|(E + A^{-1}\delta A)^{-1}\| \|A^{-1}\| \\ &\stackrel{\text{Teil a)}}{\leq} \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\delta A\|} \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \|\delta A\|} = \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \underbrace{\|A\| \|A^{-1}\|}_{=\kappa(A)} \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}. \end{aligned}$$

Aufgabe 3:

Das Ausgangsproblem wird gelöst durch $x^{(1)} = (1, 0)^T$. Die Änderung der rechten Seite ist $\delta b = (0.01, 0)^T$. Das leicht veränderte Problem besitzt die (völlig andere) Lösung $x^{(2)} = (0.34, 0.97)^T$ (diese Lösung ist ebenfalls exakt!). In der l_1 -Norm sind die absoluten bzw. relativen Änderungen gegeben durch

$$\begin{aligned} \|\delta b\|_1 &= 0.01, \quad \|\delta x\|_1 = \|x^{(1)} - x^{(2)}\|_1 = 1.63, \\ \frac{\|\delta b\|_1}{\|b\|_1} &= \frac{1}{1380}, \quad \frac{\|\delta x\|_1}{\|x\|_1} = 1.63. \end{aligned}$$

Eine kleine relative Änderung der rechten Seite verursacht hier einen großen relativen Fehler in der Lösung. Der Zusammenhang wird beschrieben durch Formel (31) des Skriptes. Im vorliegenden Fall ist $\delta A = 0$ und (31) reduziert sich (für beliebige Norm) zu

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}.$$

Die Konditionszahl $\kappa(A)$ spielt hier also deutlich die Rolle eines 'Fehler-Verstärkungsfaktors'. Offensichtlich ist

$$\kappa(A) \geq 1.63 \cdot 1380 = 2249.4.$$

Berechnung der Kondition durch $\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$ ergibt, dass in der l_1 -Norm $\kappa(A) = 2249.4$.

Aufgabe 4:

$$\|Ax^* - b\| = \|A(\tilde{x} + \tilde{s}) - b\| = \|A\tilde{x} + A\tilde{s} - b\| = \|A\tilde{s} - r\| \leq \varepsilon \|r\| \leq \varepsilon^2 \|b\|.$$