

**Lösungen zur Vorlesung „Numerische Mathematik für Studierende der
Wirtschaftsmathematik, der Lehramter und der Naturwissenschaften“**

Blatt 11

Aufgabe 1: Gegeben sei eine äquidistante Unterteilung $\Delta : a = x_0 < \dots < x_n = b$ des Intervalls $[a, b]$ mit Gitterweite $h = \frac{b-a}{n}$. Weisen Sie nach, dass für die summierte Mittelpunkt-Regel

$$M(h) := \sum_{i=1}^n f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) h$$

zur numerischen Berechnung des Integrals $\int_a^b f(x) dx$ die Fehlerdarstellung

$$M(h) - \int_a^b f(x) dx = -\frac{h^2}{24}(b-a)f''(\xi) \text{ mit einem } \xi \in [a, b]$$

gültig ist. Dabei wird $f \in C^2([a, b])$ vorausgesetzt.

Lösung: Wir haben mit Hilfe des Zwischenwertsatzes für stetige Funktionen zusammen mit der Darstellung des Fehlers für die Mittelpunkt-Regel aus Aufgabe 3, Blatt 10 und wegen $h = (b-a)/n$

$$\begin{aligned} M(h) - \int_a^b f(x) dx &= \sum_{i=1}^n \left\{ f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) h - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \right\} = \\ &= -\frac{h^3}{24} \sum_{i=1}^n f''(\xi_i) \text{ mit } \xi_i \in (x_{i-1}, x_i) \\ &= -\frac{h^2}{24}(b-a)f''(\xi) \text{ mit einem } \xi \in [a, b]. \end{aligned}$$

Aufgabe 2:

Implementieren Sie die adaptive zusammengesetzte Simpsonregel. Verwenden Sie das Abbruchbedingung aus der Vorlesung, siehe Skript (114), mit $\varepsilon = 10^{-6}$. Berechnen Sie damit

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{10^{-4} + x^2} dx,$$

wobei das Integral zu Beginn in 10 äquidistante Teilintervalle unterteilt sein soll. Prüfen Sie anhand der analytischen Lösung die Güte der Quadratur und der Fehlerschätzung. Hinweis dazu: $\int 1/(1+z^2) dz = \arctan z + C$.

Lösung: Zunächst wird die Quadratur mit zusammengesetzter Simpson-Regel in 10 äquidistanten Intervallen ausgeführt. Das Ergebnis S_{ab} wird als Startwert für die adaptive Berechnung verwendet:

```

for i = 1:10
    a(i) = -1+(i-1)/5; % "aquidistante Intervallgrenzen
end
for i = 1:10
    I(i) = Simpson(a(i),a(i+1)); % Quadratur in "aquidistanten Teilintervallen
end
Sab = sum(I); % Quadratur auf [a,b] mit zusammengesetzter Simpson-Regel
Iab = AdSimpson(-1,1,Sab,1e-6)

```

mit den Funktionen

Matlab-Funktion AdSimpson.m:

```

function AdS=AdSimpson(a,b,Sab,delta)
%
c = (a+b)/2;
h = b-a;
Sac = Simpson(a,c);
Scb = Simpson(c,b);
Q = Sac+Scb;
%
if abs(Q-Sab)>h*delta
    Adac = AdSimpson(a,c,Sac,delta);
    Adcb = AdSimpson(c,b,Scb,delta);
    AdS = Adac+Adcb;
else
    AdS = Q
end

```

sowie **Matlab-Funktion Simpson.m:**

```

function S = Simpson(a,b)
S = (b-a)/6*(f(a)+4*f((a+b)/2)+f(b));

```

und **Matlab-Funktion f.m:**

```

function y = f(x)
y = 1./(1e-4+x.^2);

```

Der Aufruf liefert

$$Sab = 7.027715675617895e + 002, \quad AdS = 3.121593320669448e + 002,$$

d.h., die äquidistante Quadratur liefert einen völlig falschen Wert. Die analytische Lösung ist gegeben durch

$$I_{\text{exakt}} = \int_{-1}^1 \frac{dx}{10^{-4} + x^2} = 200 \arctan(100) = 3.121593320216463e + 002.$$

Die Differenz zwischen exakter Lösung und adaptiver Quadratur beträgt also

$$|I_{\text{exakt}} - AdS| \approx 4.5 \cdot 10^{-8}$$

und damit einen Faktor 22 genauer als angestrebt. Die Fehlerschätzung ist also deutlich zu pessimistisch.

Aufgabe 3: Lösen Sie das folgende lineare Minimierungsproblem graphisch:

$$\min(c^T x : x \in \mathbb{R}^2, (Ax)_j \leq b_j, j = 1, \dots, 4).$$

Die Nebenbedingungen sind definiert durch

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \\ -5 & 2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} 2 \\ 18 \\ 13 \\ 7 \end{pmatrix} = b$$

und die Zielfunktion $f(x) := c^T x$ durch $c = (-1, -1)$.
Zeichnen Sie zu diesem Zweck zunächst die Menge

$$M := (x \in \mathbb{R}^2 : (Ax)_j \leq b_j, j = 1, \dots, 4)$$

sowie die Höhenlinien der Zielfunktion $f(x)$. Bestimmen Sie dann anhand der Zeichnung graphisch die Lösung

$$\min_{x \in M} c^T x.$$

Lösung: Aus den vier Nebenbedingungen ergeben sich vier Geraden-Gleichungen (im Bild mit (1),...(4) markiert), deren Schnittfläche die zulässige Menge M markiert (siehe Bild). Auch die Höhenlinien der Zielfunktion sind durch Geraden-Gleichungen gegeben (auf dem Bild gestrichelt für $f = 0, -3, -6$). Das Minimum wird im Punkt $x = (4, 2)^T$ angenommen.

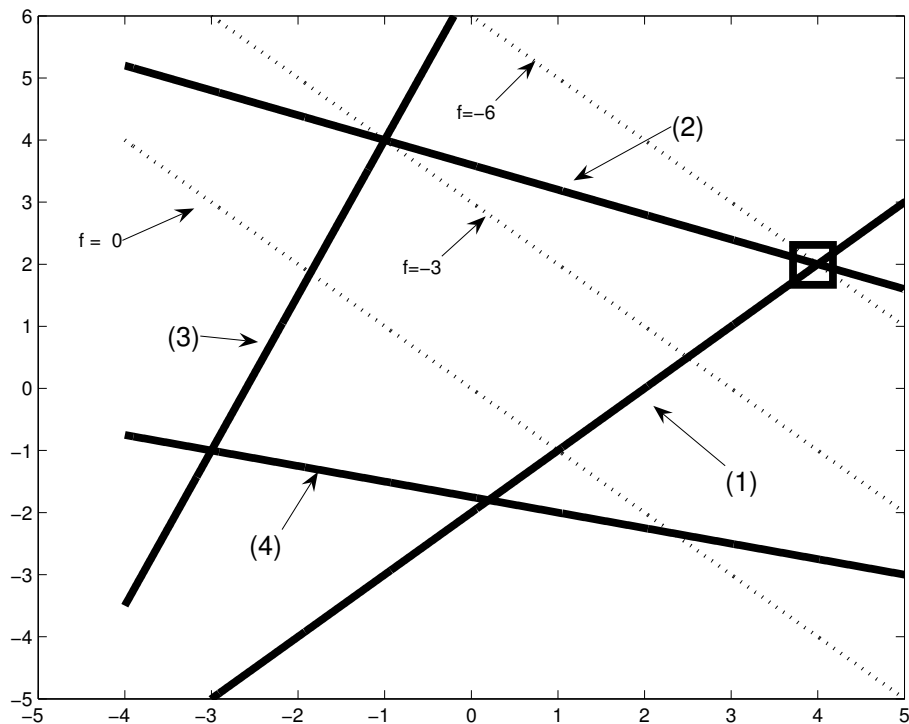
Aufgabe 4: Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ und $c \in \mathbb{R}^n$ gegeben.
Betrachten Sie das lineare Programm (LP)

$$\min(c^T x : x \in \mathbb{R}^n, Ax = b, x_j \geq 0, j = 1, \dots, n)$$

und sein Dualproblem (DP)

$$\max(b^T y : y \in \mathbb{R}^m, (A^T y)_i \leq c_i, i = 1, \dots, n).$$

Stellen Sie den Zusammenhang zwischen den Lösungen von (LP) und (DP) her. Zeigen Sie zu diesem Zweck:



- a) Ist $x \in \mathbb{R}^n$ zulässig für (LP), d.h., $Ax = b, x_j \geq 0, j = 1, \dots, n$ und $y \in \mathbb{R}^m$ zulässig für (DP), d.h., $(A^T y)_i \leq c_i, i = 1, \dots, n$, dann gilt $b^T y \leq c^T x$.
- b) Sei nun $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ zulässig für (LP) und $\tilde{y} \in \mathbb{R}^m$ zulässig für (DP). Gilt darüber hinaus noch

$$b^T \tilde{y} = c^T \tilde{x},$$

so sind $\tilde{x}$ und $\tilde{y}$ sogar die Lösungen von (LP) bzw. (DP).

- c) Unter den in b) gegebenen Voraussetzungen gilt die Komplementaritätsbedingung

$$\tilde{x}^T (A^T \tilde{y} - c) = 0.$$

Lösung: zu a)

$$\begin{aligned} b^T y &= (Ax)^T y = x^T A^T y \leq x^T c, \quad \text{denn } x \geq 0 \\ &\leq c^T x. \end{aligned}$$

zu b) Für $b^T \tilde{y}$ gilt wegen a) $c^T x \geq b^T \tilde{y}$ für alle zulässigen x . Umgekehrt gilt wegen a) auch $c^T \tilde{x} \geq b^T y$ für alle zulässigen y . Damit also:

$$b^T y \leq c^T \tilde{x} = b^T \tilde{y} \leq c^T x.$$

Damit gilt insbesondere $b^T y \leq b^T \tilde{y}$ sowie $c^T \tilde{x} \leq c^T x$, d.h. $\tilde{y}$ und $\tilde{x}$ lösen (DP) bzw. (LP).
zu c) Unter den in b) gegebenen Voraussetzungen gilt

$$\tilde{x}^T (A^T \tilde{y} - c) = (A\tilde{x})^T \tilde{y} - \tilde{x}^T c = b^T \tilde{y} - c^T \tilde{x} = 0.$$