

**Lösungen zur Vorlesung „Numerische Mathematik für Studierende der
Wirtschaftsmathematik, der Lehramter und der Naturwissenschaften“**

Blatt 10

Abgabetermin: 27.6.2006

Aufgabe 1: Gegeben sei die zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : [0, h] \rightarrow \mathbb{R}$.

a) Leiten Sie eine Quadraturformel $Q_\ell(h) = A(h)f(0) + B(h)f(h)$ gemäß

$$\int_0^h f(x)\sqrt{x} \, dx = A(h)f(0) + B(h)f(h) + R$$

her, indem f durch ein lineares Polynom mit den Stützstellen 0 und h interpoliert wird. Geben Sie eine Darstellung für das Restglied R an.

b) Berechnen Sie nach der in (a) aufgestellten Quadraturformel Q_ℓ genähert das Integral

$$J = \int_0^{\pi/4} \sqrt{x} \sin x \, dx$$

und geben Sie Schranken für den auftretenden Fehler an.

Vergleichen Sie mit der Trapez Regel und diskutieren Sie die unterschiedliche Größe des Fehlers.

Lösung:

$$f(x) \approx p_1(x) = \frac{1}{h} \{f(0)[h-x] + f(h)x\}$$

Herleitung der Koeffizienten aus

$$\int_0^h p_1(x)\sqrt{x} \, dx = A(h)p_1(0) + B(h)p_1(h)$$

also

$$\frac{1}{h} \int_0^h \{f(0)[h-x] + f(h)x\}\sqrt{x} \, dx = A(h)f(0) + B(h)f(h)$$

Aus

$$\int_0^h \{f(0)[h-x] + f(h)x\}\sqrt{x} \, dx = f(0)h \int_0^h x^{1/2} \, dx + [f(h) - f(0)] \int_0^h x^{3/2} \, dx$$

$$\begin{aligned}
&= \left[f(0) h \frac{2}{3} x^{3/2} + [f(h) - f(0)] \frac{2}{5} x^{5/2} \right]_0^h = \left\{ \frac{2}{3} f(0) + \frac{2}{5} [f(h) - f(0)] \right\} h^{5/2} \\
&= \left\{ \frac{4}{15} f(0) + \frac{2}{5} f(h) \right\} h^{5/2}
\end{aligned}$$

folgt die Quadraturformel:

$$\int_0^h f(x) \sqrt{x} \, dx \approx \left\{ \frac{4}{15} f(0) + \frac{2}{5} f(h) \right\} h^{3/2} = Q_\ell(h)$$

d.h., $A(h) = \frac{4}{15} h^{3/2}$ und $B(h) = \frac{2}{5} h^{3/2}$

Jetzt zur Herleitung des Fehlers. Dazu:

$$f(x) = p_1(x) + \frac{1}{2} f''(\xi(x)) x(x-h) \quad \text{mit } \xi \in (0, x) \subset (0, h)$$

also

$$R = \frac{1}{2} \int_0^h f''(\xi(x)) x(x-h) \sqrt{x} \, dx = \frac{1}{2} \int_0^h f''(\xi(x)) (x-h) x^{3/2} \, dx$$

2. (oder erweiterter) Mittelwertsatz der Integralrechnung:

f, g stetig und $g \geq 0$ in $[a, b]$, dann gibt es ein $\eta \in (a, b)$ mit

$$\int_a^b f(x) g(x) \, dx = f(\eta) \int_a^b g(x) \, dx$$

Anwendung liefert $[g(x) = (x-h)x^{3/2}]$: Es gibt ein $\eta \in (0, h)$ mit

$$R = \frac{1}{2} f''(\eta) \int_0^h [x^{5/2} - hx^{3/2}] \, dx = \frac{1}{2} f''(\eta) \left[\frac{2}{7} x^{7/2} - h \frac{2}{5} x^{5/2} \right] \Big|_0^h = -\frac{2}{35} f''(\eta) h^{7/2}$$

Anwendung für $f(x) = \sin(x)$ und $h = \pi/4$ liefert ($f''(x) = -\sin(x)$):

$$1. \quad Q_\ell(h) = \left\{ \frac{4}{15} 0 + \frac{2}{5} \frac{\sqrt{2}}{2} \right\} \left[\frac{\pi}{4} \right]^{3/2} = \frac{\sqrt{2\pi} \pi}{40} \approx 0.196870$$

$$2. \quad 0 < R < \frac{2}{35} \sin(\eta) \left| \left[\frac{\pi}{4} \right]^{7/2} \right| < \frac{2}{35} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \left| \left[\frac{\pi}{4} \right]^{7/2} \right| \leq \frac{\sqrt{2\pi} \pi^3}{4480} \approx 0.017349$$

3. Wert mit Maple bei Rechnen mit 20 Stellen: 0.206442...
d.h., Fehler 0.00957..., d.h. Schätzung mit R gut

Vergleich mit der Trapez Regel: $Q_T = \frac{b-a}{2} \{f(a) + f(b)\}$

[hier: $a = 0, b = \pi/4$ und $f(x) = \sin(x) \sqrt{x}$]

$$Q_T = \frac{\pi}{8} \left\{ 0 + \sqrt{\frac{\pi}{4}} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right\} \approx 0.246087$$

d.h., Fehler 0.03964...

Ergebniss schlechter

Diskussion:

1. für $h \rightarrow 0$ muss Trapez Regel schlecht werden, weil $(\sqrt{x})'' = -1/(4x\sqrt{x})$ und damit die im Fehlerterm R der Trapez Regel vorhandene 2. Ableitung des Integranten nicht beschränkt ist für $h \rightarrow 0$. Die Fehlerordnung wird dann nur noch $h^{3/2}$ betragen für $h \rightarrow 0$ im Gegensatz zu h^2 bei der Quadratur glatter Funktionen.

2. bei der angepassten Quadraturformel ist das nicht der Fall, der Fehler hat die Ordnung h^2 für $h \rightarrow 0$ (s. obige Abschätzung)!

Aufgabe 2:

Leiten Sie die Newton-Cotes Formel für $n = 3$ [3/8 Regel] her.

Lösung:

Ansatz für die 3/8 Regel für den Integralwert

$$I(f) := \int_a^b f(x) dx$$

ist

$$Qf := \frac{b-a}{3} \left\{ \alpha_0 f(a) + \alpha_1 f\left(a + \frac{b-a}{3}\right) + \alpha_2 f\left(a + 2\frac{b-a}{3}\right) + \alpha_3 f(b) \right\}$$

wobei für die α_i mit $h = (b-a)/n$ und $n = 3$ gilt: $\alpha_i = \frac{1}{h} \int_a^b L_i(x) dx$, also

$$\alpha_i = \frac{3}{b-a} \int_a^b L_i(x) dx$$

mit $L_i(x)$... Lagrange Interpolationspolynom bei $x_i, i = 0, 1, 2, 3$ zu den Stützstellen $x_0 = a$, $x_1 = a + \frac{b-a}{3}$, $x_2 = a + 2\frac{b-a}{3}$ und $x_3 = b$ (s. Skript)

nun gilt:

$$L_0(x) = \frac{[x - (a + (b-a)/3)][x - (a + 2(b-a)/3)][x - b]}{[a - (a + (b-a)/3)][a - (a + 2(b-a)/3)][a - b]} = \frac{1}{6h^3}\{x^3 + \dots\}$$

$$L_1(x) = \frac{[x - a][x - (a + 2(b-a)/3)][x - b]}{[(a + (b-a)/3) - a][(a + (b-a)/3) - (a + 2(b-a)/3)][(a + (b-a)/3) - b]} = \frac{1}{-2h^3}\{x^3 + \dots\}$$

Nun ist (Integration mit Maple und Symmetrie):

$$\int_a^b L_0(x) dx = \int_a^b L_3(x) dx = \frac{b-a}{8} \quad \text{und} \quad \int_a^b L_1(x) dx = \int_a^b L_2(x) dx = \frac{3(b-a)}{8}$$

also

$$\alpha_0 = \alpha_3 = \frac{3}{8} \quad \text{und} \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{9}{8}$$

also

$$Qf := \frac{b-a}{3} \left\{ \frac{3}{8} f(a) + \frac{9}{8} f\left(a + \frac{b-a}{3}\right) + \frac{9}{8} f\left(a + 2\frac{b-a}{3}\right) + \frac{3}{8} f(b) \right\}$$

also

$$Qf := \frac{b-a}{8} \left\{ f(a) + 3 f\left(a + \frac{b-a}{3}\right) + 3 f\left(a + 2\frac{b-a}{3}\right) + f(b) \right\} = \frac{b-a}{ns} \sum_{i=0}^n \sigma_i f_i$$

mit $ns = 8$ und $\sigma_0 = \sigma_3 = 1$ sowie $\sigma_1 = \sigma_2 = 3$

Hinweis: Die $3/8$ Regel ist exakt mindestens für Polynome 3. Grades. Folglich lassen sich die Gewichte $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ analog zur Vorgehensweise in Aufgabe 2 auch aus einer beliebigen Basis im Raum der Polynome 3. Grades bestimmen (also nicht notwendig die Lagrange Interpolationspolynome). Günstig sind z.B. die Polynome $1, x-a, (x-a)^2$ und $(x-a)^3$, die als Funktion $f(x)$ in die Gleichung

$$\frac{b-a}{3} \left\{ \alpha_0 f(a) + \alpha_1 f\left(a + \frac{b-a}{3}\right) + \alpha_2 f\left(a + 2\frac{b-a}{3}\right) + \alpha_3 f(b) \right\} = I(f)$$

nacheinander eingesetzt das folgende lineare Gleichungssystem liefern:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 8 & 27 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 9/2 \\ 9 \\ 81/4 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 3: Beweisen Sie die Fehlerdarstellung (106) für die Mittelpunkt Regel, d.h. weisen Sie nach, daß mit $Q(f) := (b-a)f(\frac{a+b}{2})$ die Darstellung

$$\int_a^b f(x)dx - Q(f) = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi) \text{ mit einem } \xi \in [a, b]$$

gültig ist. Tipp: Wenden Sie Hilfsatz 5.2 aus dem Skript für den Fall $n = 0$ an.

Lösung: Die Anwendung des Hilfssatzes 5.2 auf die Mittelpunkregel liefert

$$\begin{aligned} I_0(f) - I(f) &= \int_a^b (f(x) - p_0(x)) dx = \int_a^b (f(x) - p_1(x)) dx \\ &= \int_a^b (f[x_0, z, x](x-z)(x-x_0)) dx \rightarrow \int_a^b (f[x_0, x_0, x](x-x_0)^2) dx \text{ für } z \rightarrow x_0 \\ &= f[x_0, x_0, \xi] \int_a^b (x-x_0)^2 dx \text{ mit einem } \xi \in [a, b]. \end{aligned}$$

Der Grenzübergang $z \rightarrow x_0$ unter dem Integral ist möglich, falls f glatt genug ist. Beachte, daß die linke Seite der Gleichungskette unabhängig von z ist. Damit haben wir

$$I_0(f) - I(f) = f[x_0, z, \xi] \frac{1}{12} (b-a)^3.$$

Für $f \in C^2([a, b])$ liefert Satz 4.14 zudem $f[x_0, z, \xi] = 1/2! f''(\xi)$, also

$$I_0(f) - I(f) = f''(\xi) \frac{1}{24} (b-a)^3.$$

Aufgabe 4:

Berechne x_0 und x_1 aus der Aufgabe

$$\int_{-1}^1 (x-x_0)^2 (x-x_1)^2 dx \rightarrow \min!$$

x_0 und x_1 können als Stützstellen für eine Quadraturformel dienen. Welche Quadraturformel verwendet genau diese Stützstellen und welche Ordnung hat der Quadraturfehler?

Lösung:

Durch Integration ergibt sich

$$f(x_0, x_1) := \int_{-1}^1 (x-x_0)^2 (x-x_1)^2 dx = 2x_0^2 x_1^2 + \frac{2}{3}(x_0^2 + x_1^2) + \frac{8}{3}x_0 x_1 + \frac{2}{5}.$$

Die notwendige Bedingung für die Aufgabe $f(x_0, x_1) \rightarrow \min!$ liefert das nichtlineare Gleichungssystem

$$\nabla f(x_0, x_1) = \begin{bmatrix} 4x_0 x_1^2 + \frac{4}{3}(x_0 + 2x_1) \\ 4x_0^2 x_1 + \frac{4}{3}(2x_0 + x_1) \end{bmatrix} = 0 \quad (1)$$

zur Bestimmung von x_0 und x_1 . Offensichtlich ist (1) trivial lösbar, d. h., $x_0 = x_1 = 0$ ist eine Lösung von (1). Um nichttriviale Lösungen zu bestimmen, kann man z. B. die erste Gleichung nach x_0 auflösen und den so erhaltenen Term $x_0 = \frac{-2x_1}{1+3x_1^2}$ in die zweite Gleichung von (1) einsetzen. So ergibt sich für x_1 die Gleichung

$$x_1 - \frac{4x_1}{1+3x_1^2} + \frac{12x_1^3}{(1+3x_1^2)^2} = 0,$$

die wegen $x_1 \neq 0$ und mit $z := x_1^2$ zur quadratischen Gleichung $z^2 + \frac{2}{3}z - \frac{1}{3} = 0$ äquivalent ist. Sie hat die Lösungen $z_1 = -1$ und $z_1 = \frac{1}{3}$. Wegen $z := x_1^2 > 0$ entfällt die Lösung $z_1 = -1$. Es verbleiben

$$x_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{und damit} \quad x_{0,2} = \mp \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Da für x_0 und x_1 ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x_0 < x_1$ angenommen werden kann, hat (1) nur die eine nichttriviale Lösung

$$x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}. \quad (2)$$

Diese Lösung erfüllt die hinreichenden Bedingung für ein lokales Minimum, weil die HESSE-Matrix

$$\nabla^2 f(x_0, x_1) = \begin{bmatrix} 4x_1^2 + \frac{4}{3} & 8x_0x_1 + \frac{8}{3} \\ 8x_0x_1 + \frac{8}{3} & 4x_0^2 + \frac{4}{3} \end{bmatrix}, \quad \nabla^2 f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \begin{bmatrix} \frac{8}{3} & 0 \\ 0 & \frac{8}{3} \end{bmatrix}$$

positiv definit ist. Da die HESSE-Matrix

$$\nabla^2 f(0, 0) = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{8}{3} \\ \frac{8}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

indefinit ist (ein Eigenwert ist positiv ($\lambda_1 = 4$) und der andere ($\lambda_2 = -4/3$) ist negativ), ist $(0, 0)$ keine Minimustelle von f . Folglich ist die nichttriviale Lösungen von (1) die globale Minimumstelle von f mit

$$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{8}{45}.$$

Werden die Stützstellen x_0 und x_1 gemäß (2) gewählt, erhält man die GAUSS-Quadraturformel

$$Q_G(g) := g\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \approx \int_{-1}^1 g(x) dx,$$

die Polynome bis zum Höchstgrad 3 exakt integriert. Der Quadraturfehler hat die Ordnung $p = 4$ wie bei der SIMPSON- bzw. $\frac{3}{8}$ -Regel, die jedoch 3 bzw. sogar 4 Funktionwertauswertungen $g(\cdot)$ benötigen. $\square$