Prof. Dr. M. Hinze
Dr. S. Heitmann SoSe 2006

Lösungen zur Vorlesung „Numerische Mathematik für Studierende der Wirtschaftsmathematik, der Lehrämter und der Naturwissenschaften“
Blatt 1
Abgabetermin: 11.04.2006

Aufgabe 1 (2 Punkte)
Zu c): $1-\cos(z) \approx \Big(1-(1-\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{4!}\mp ...)\Big) = \frac{z^2}{2}-\frac{z^4}{4!}\pm ...$ (alternierend) $\approx \frac{z^2}{2}+R_2$ mit $|R_2| \leq |\frac{z^4}{4!}| \approx 9.6\cdot 10^{-22}$ (Leibniz). Während b) und c) genaue Werte für $1-\cos(z)$ liefern, erwarten wir in a) aufgrund der Differenzenbildung Auslöschung.
Matlab-Programm

```
z = 0.12345e-4; erg1 = 1-cos(z);  erg2 = 2*sin(z/2)*sin(z/2);
erg3 = z*z/2; fehler1 = erg3-erg1;  fehler2 = erg3-erg2;
erg4 = log(1)-log(1+z); erg5 = log(1/(1+z))
```

liefert

```
erg1 = 7.619949116133284e-011;
erg2 = 7.619951249903228e-011;
erg3 = 7.619951249999999e-011.
```

Also Auslöschung in a).
Umgekehrt für den Logarithmus: Als Referenzlösung betrachten wir eine sehr genaue Potenzreihenentwicklung des natürlichen Logarithmus. Sie ist durch

$$\ln(x) = 2\cdot\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{2i+1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2i+1} + R_n(x) \tag{1}$$

gegeben. Das Restglied bei Abbruch nach den ersten beiden Termen läßt sich abschätzen zu

$$|R_2(x)| \leq \frac{(x-1)^2}{2|x|}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$$

mit $|R_2(1+z)| \leq 2.9\cdot 10^{-21}$. Diese Entwicklung konvergiert schneller als die 'handelsübliche' $\ln(1+x)=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i(\frac{x^{i+1}}{i+1})$. Anwendung von (1) liefert

$$\ln(1+z) \approx 2\left(\frac{z}{z+2}+\frac{1}{3}\left(\frac{z}{z+2}\right)^3\right) \approx 1.23449238011146(2)\cdot 10^{-5}.$$

Da $\ln(1)=0$, ist erg4 einfach $-\ln(1+z) = -1.234492380113931\cdot 10^{-5}$, d.h., es erfolgt keine Auslöschung und erg4 ist (etwas) genauer als erg5 = $-1.234492380118803\cdot 10^{-5}$. Für den 10er-Logarithmus gilt natürlich eine analoge Argumentation.

Parameter	$p=10^4,\ q=1$	$p=10^6,\ q=1$	$p=10^8,\ q=1$
x_1 aus (3)	-9999.999899999998	-999999.999999	-100000000
x_2 aus (3)	-0.0000100000001	-1.000000000001e-006	-1e-008
x_2^*	-0.000010000000011117663	-1.00000761449337e-006	-7.450580596923828e-009
Defekt/x_1	0	0	-1e-008
Defekt/x_2	0	0	-1.110223024625156e-008
Defekt/x_2^*	1.117663060776578e-005	7.614434389907073	-34217728

Tabelle 1: Zu Aufgabe 3. $x_2^* := -p/2 + sign(p) \cdot \sqrt{(p/2)^2 - q}$

Aufgabe 2 (2 Punkte)

```
n = 0;
for x = 1:100
y = ((1/x)/10+1)*x-x;
 if  y == 0.1
 n = n+1;
end
end
en = n %  Anzahl der richtigen Treffer
>> en = 0
```

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Wegen Vietaschem Wurzelsatz für quadratische Gleichungen $-(x_1 + x_2) = p,\ x_1 \cdot x_2 = q$ wähle

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \\ x_2 &= \frac{q}{x_1} \quad \text{oder (wenn } x_1 + p \gg 0) \quad x_2 = -(x_1 + p). \end{aligned} \tag{2}$$

Beachte Fallunterscheidungen $(p/2)^2 \ll q, (p/2)^2 \approx q, (p/2)^2 \gg q$. Ersten beiden Fälle kein Problem. Wähle das Vorzeichen in x_1-Formel (2) so, dass für $(p/2)^2 \gg q$ keine Auslöschung auftritt. Betrachte den Fall $(p/2)^2 \gg q$: $\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \approx |p|/2$, da für den Rechner immer $\sqrt{p^2} = |p|$, auch für $p < 0$. Wähle also

$$x_1 = -\frac{p}{2} - sign(p)\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q},\ x_2 = \frac{q}{x_1} \tag{3}$$

denn $-p = -|p|$ für $p > 0$ und $|p|$ sonst. Also $x_1 \approx -|p|/2(1 + sign(p))$ für $p \geq 0$, $x_1 \approx |p|/2(1 - sign(p))$ für $p < 0$, vermeidet Auslöschung.

n	u_{2n}	uv_{2n}	U_{2n}	Uv_{2n}
3	3.0000000000	3.00000000000000	3.4641016151	3.46410161513775
48	3.1410319509	3.14103195089051	3.1427145996	3.14271459964537
3072	3.1415925168	3.14159251669216	3.1415929275	3.14159292738510
100663296	3.0000000000	3.14159265358979	2.9127601035	3.14159265358979
201326592	3.4641016151	3.14159265358979	4.1198037510	3.14159265358979
402653184	0.0000000000	3.14159265358979	11.6510404140	3.14159265358979

Tabelle 2: Zu Aufgabe 4. Ergebnisse der π –Berechnung

Aufgabe 4 (6 Punkte)
Matlab-Programm

```
u2 = 3*sqrt(3);U2 = 6*sqrt(3);uv2 = 3*sqrt(3);Uv2 = 6*sqrt(3);% Ausgangsdaten
n = 3; i = 1;
while n <= 100663296*4;
  u2 = sqrt(4*n*(2*n-sqrt(4*n*n-u2*u2)));% einbeschriebenes n-Eck
  uv2 = uv2*sqrt(4*n/(2*n+sqrt(4*n*n-uv2*uv2))); % verbesserte Version
  U2 = 4*n*(sqrt(4*n*n+U2*U2)-2*n)/U2; % umbeschriebenes n-Eck
  Uv2 = 4*n*Uv2/(sqrt(4*n*n+Uv2*Uv2)+2*n); % verbesserte Version
if n==3| n==48 | n==3072 | n ==100663296| n==100663296*2| n==100663296*4;
in(i) = n;
u2n(1,i) = u2/2;uv2n(1,i) = uv2/2;U2n(1,i) = U2/2;Uv2n(1,i) = Uv2/2;
i = i+1;
end
n = n^2;
end
y = [in;u2n;uv2n;U2n;Uv2n];
erg = fopen('Pi-Berechnung.txt','w+');
fprintf(erg,'Ergebnisse der Pi-Berechnung\n')
fprintf(erg,'  n      u_{2n}      uv_{2n}      U_{2n}     Uv_{2n}     \n')
fprintf(erg,'%9.0f   %2.10f    %2.14f     %2.10f    %2.14f\n',y);
fclose(erg);
```

Auslöschung möglich bei $2n - \sqrt{4n^2 - u_n^2}$, denn $\lim_{n\to\infty} \sqrt{4n^2 - u_n^2} = 2n$, da $\lim_{n\to\infty} \sqrt{4n^2} = \infty$, während u_n^2 beschränkt bleibt wg. $\lim_{n\to\infty} u_n = 2\pi$.